Exercice n°1 : Fonction de coûts

Soit une firme produisant une quantité de bien y en utilisant deux inputs notés x_1 et x_2, à partir de la fonction de production $F(x_1,\, x_2) = {x_1}^{1/6}.{x_2}^{1/6}$. Le prix de vente du bien est noté p tandis que les prix des deux inputs sont supposés identiques et égaux à $c = 1/2$.

1) Ecrire le programme [P1] permettant de déterminer la fonction de coûts de la firme et ses demandes de facteurs conditionnelles

On cherche le coût minimal permettant de produire un niveau y donné. Le problème s'écrit sous la forme du programme [P1]:

$$\begin{aligned} &\text{Min}_{\{x_1,\, x_2\}} \;\; C(x_1,\, x_2) = \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 \\ &s.t. \quad F(x_1,\, x_2) \geq y \end{aligned}$$

0,5

2) Ecrire le lagrangien et les conditions du premier ordre associés à ce programme

Le lagrangien associé à [P1] est : $L = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \lambda(F(x_1,\, x_2) - y)$ où $\lambda \geq 0$ **0,5**

Et les conditions du 1$^{\text{er}}$ ordre sont données par le système de 3 équations à 3 inconnues (x_1, x_2 et λ)

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} &= \lambda F_{x_1}(\cdot) && [1] \\ \tfrac{1}{2} &= \lambda F_{x_2}(\cdot) && [2] \\ \lambda(F(x_1,\, x_2) - y) &= 0 && [3] \end{aligned}$$

0,5

3) Identifier l'équation du sentier d'expansion? Interpréter cette équation et la représenter graphiquement

En formant le rapport de [1] et [2], on obtient l'équation du sentier d'expansion :

$$\frac{F_{x_1}(\cdot)}{F_{x_1}(\cdot)} = 1 \quad i.e. \quad x_2 = x_1$$ **0,5**

Cette équation donne le rapport entre les inputs à l'optimum. Comme les prix des 2 facteurs sont identiques de même que leurs productivités marginales, on a sans surprise : $\frac{x_2}{x_1} = 1$. **0,25**

Graphiquement l'équation du sentier d'expansion correspond, dans le plan $(x_1,\, x_2)$, à la 1$^{\text{ère}}$ bissectrice. **0,25**

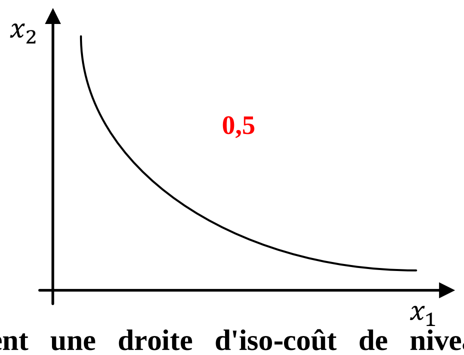
4) Donner l'équation d'un isoquant et le représenter graphiquement

L'isoquant de niveau y est défini par :

0,5 $F(x_1,\, x_2) = {x_1}^{1/6}.{x_2}^{1/6} = y$

Son équation dans le plan $(x_1,\, x_2)$ est donc : $x_2 = \frac{y^6}{x_1}$

La partie au dessus de l'isoquant correspond à la contrainte $F(x_1,\, x_2) \geq y$



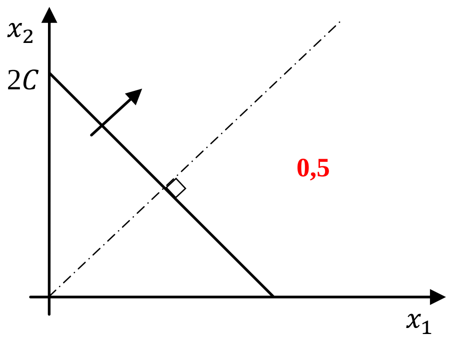
5) Donner l'équation et représenter graphiquement une droite d'iso-coût de niveau C quelconque

La droite d'iso-coûts de niveau C est définie par :

$$C(x_1,\, x_2) = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = C$$

Son équation dans le plan $(x_1,\, x_2)$ est : $x_2 = 2C - x_1$ **0,5**

Segment de droite de pente -1 et d'ordonnée à l'origine $2C$



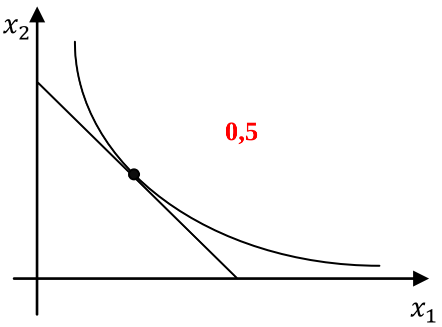
Le sens de coût croissant est indiqué par la flèche

6) Résolvez graphiquement le programme [P1] de l'entreprise

Pour minimiser le coût la firme se situe sur la plus basse des droites d'iso-coûts sous contrainte de produire au moins la quantité y *i.e.* d'être au dessus de l'isoquant de niveau y **0,5**

A l'optimum on a alors le graphique ci-contre

La firme sature la contrainte $F(x_1, x_2) \geq y$ et la pente de l'isoquant est égale à la pente de la droite d'iso-coûts



7) Montrer analytiquement qu'à l'optimum l'isoquant est tangent à la droite d'iso-coût

On a vu que l'équation de l'isoquant dans le plan (x_1, x_2) est : $x_2 = \frac{y^6}{x_1}$

- La pente de l'isoquant est donc : $\frac{\partial x_2}{\partial x_1} = \frac{-y^6}{x_1{}^2}$ soit, comme $x_1{}^{1/6}.x_2{}^{1/6} = y$: $\frac{\partial x_2}{\partial x_1} = \frac{-x_2}{x_1}$ **0,25**

On a vu que l'équation de la droite d'iso-coûts dans le plan (x_1, x_2) est : $x_2 = 2C - x_1$

- La pente de la droite d'iso-coût est donc : $\frac{\partial x_2}{\partial x_1} = -1$ **0,25**

Enfin, on a vu à la question 3) que l'équation du sentier d'expansion qui caractérise l'optimum s'écrit : $\frac{x_2}{x_1} = 1$. Cette équation correspondant à l'égalité entre la pente de l'isoquant ($\frac{-x_2}{x_1}$) et celle de la droite d'iso-coût (-1), l'isoquant est bien tangent à la droite d'iso-coûts. **0,5**

8) Résoudre le programme [P1] et donner l'expression des demandes de facteurs conditionnelles

De [1] on tire $\lambda = \frac{1}{2F_{x_1}(\cdot)} > 0$

D'après [3] on a donc : $F(x_1, x_2) = y$ [4]

En formant le rapport $\frac{[1]}{[2]}$ on a vu qu'on avait d'autre part : $\frac{F_{x_1}(\cdot)}{F_{x_2}(\cdot)} = 1$ [5]

Comme $F(x_1, x_2) = x_1{}^{1/6}\, x_2{}^{1/6}$ [4]-[5] s'écrit :

$$x_1{}^{1/6}\, x_2{}^{1/6} = y \qquad \textbf{0,5}$$
$$x_1 = x_2$$

La résolution en x_1 et x_2 de ce système de 2 équations à 2 inconnues (y est ici exogène) donne les demandes de facteurs conditionnelles : $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = y^3$ **0,5**

9) Déduire de la question précédente la fonction de coûts de l'entreprise

Celle-ci est simplement : $\mathbb{C}(Y) = \frac{1}{2}\tilde{x}_1 + \frac{1}{2}\tilde{x}_2 = y^3$ **1**

10) Ecrire le programme [P2] permettant de déterminer l'offre de l'entreprise lorsqu'on connait sa fonction de coûts

On cherche ici le niveau optimal de production. Le problème s'écrit sous la forme du programme sans contrainte [P2]:

$$\underset{\{y\}}{\text{Max}}\ \Pi(y) = py - \mathbb{C}(y) \qquad \textbf{0,5}$$

11) Ecrire la condition du premier ordre associée à ce programme

La condition du 1^er^ ordre s'écrit:

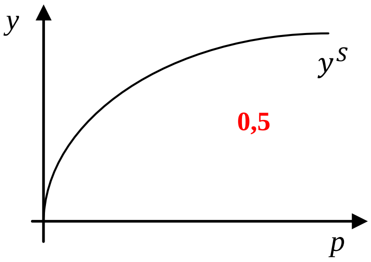
$$\Pi'(y) = p - \mathbb{C}'(y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p = 3y^2 \qquad \textbf{0,5}$$

12) Cette condition est-elle, dans le cas présent, suffisante? Pourquoi ?

La condition est suffisante car la fonction de coût est strictement convexe ⇒ rendements d'échelle strictement décroissants *i.e.* fonction profit strictement concave **0,5**

13) Déduire de cette condition la fonction d'offre de la firme et la représenter graphiquement.

La résolution en y de l'équation obtenue en 11) donne directement l'offre de la firme : $y^S = \sqrt{p/3}$ **0,5**



14) Donner l'expression des demandes de facteurs de l'entreprise

En reportant le niveau optimal de production $y^S = \sqrt{p/3}$ dans les demandes de facteurs conditionnelles, on obtient les demandes de facteurs de la firme :

$$x_1^d = x_2^d = (y^S)^3 = \left(\frac{p}{3}\right)^{3/2} \quad \mathbf{0{,}5}$$

Plus le prix de vente est important, plus il est rentable, pour la firme, de produire et plus les demandes de facteurs sont élevées. **0,5**

Exercice n°2 : Contrainte de débouchés

Soit une firme produisant un bien en quantité y en utilisant un seul input x, à partir de la fonction de production $F(x) = 2\sqrt{x}$. Le prix de vente du bien produit est noté p tandis que le prix du facteur de production est supposé unitaire.

1) Ecrire le programme [P3] permettant de déterminer simultanément l'offre de la firme et sa demande de facteur

$$\begin{aligned} &\mathrm{Max}_{\{y,x\}} \ \Pi(y,x) = py - x \\ &s.t. \quad y \leq F(x) \end{aligned} \quad \mathbf{0{,}5}$$

2) Ecrire le lagrangien et les conditions nécessaires du premier ordre associés à ce programme

Le lagrangien associé à [P3] est :

$$L = py - x + \lambda(F(x) - y) \quad \text{où} \quad \lambda \geq 0 \quad \mathbf{0{,}5}$$

Les conditions du 1er ordre sont données par le système de 3 équations à 3 inconnues (y, x et λ)

$$\begin{aligned} p - \lambda &= 0 \qquad [1] \\ -1 + \lambda F'(x) &= 0 \qquad [2] \quad \mathbf{0{,}5} \\ \lambda(F(x) - y) &= 0 \qquad [3] \end{aligned}$$

3) Ces conditions sont-elle suffisantes ? Expliquez.

$F(x)$ étant homogène de degré ½<1, les rendements d'échelle sont strictement décroissants. La condition du 2nd ordre est donc satisfaite et les conditions du premier ordre sont, par conséquent, suffisantes. **0,5**

4) Résoudre [P3] pour en déduire l'offre de bien de la firme et sa demande de facteur

De [1] on tire $\lambda = p > 0$

D'après [3] on a donc : $y = F(x)$ [4] **0,25**

En reportant $\lambda = p$ dans [2] et comme $F(x) = 2\sqrt{x}$ on a d'autre part : $px^{-1/2} = 1$ [5] **0,25**

La résolution de [5] en x donne la demande de facteur de la firme : $x^* = p^2$ **0,25**

En reportant dans [4], on obtient alors l'offre de bien de l'entreprise : $y^* = 2p$ **0,25**

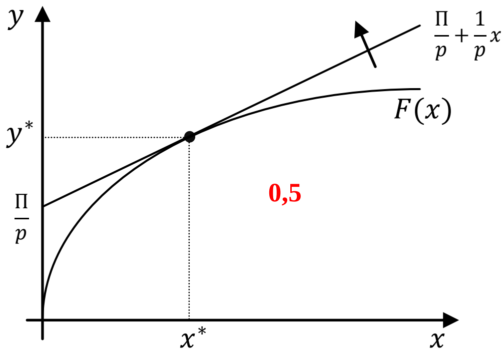
5) **Représenter graphiquement l'optimum de la firme dans le plan (x, y)**

On représente dans le plan (x, y) :

- La fonction de production $F(x) = 2\sqrt{x}$ **0,25**
- Les droites d'iso-profit définies, pour un niveau de profit exogène Π, par : $py - x = \Pi$ *i.e.* $y = \frac{\Pi}{p} + \frac{1}{p}x$ **0,25**

  Le sens de profit croissant est donné par la flèche

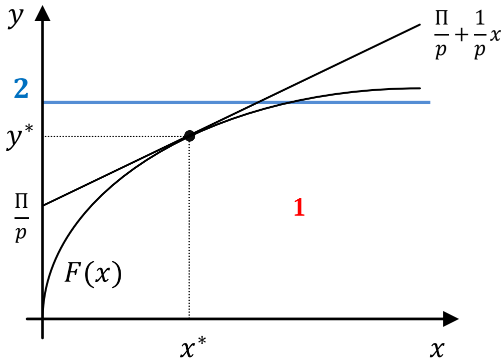
La firme se situe simplement sur la plus haute des droites d'iso-profit sous contrainte de rester dans son ensemble de production



- **On suppose maintenant que la firme fait face à une contrainte de débouchés $y \leq 2$**

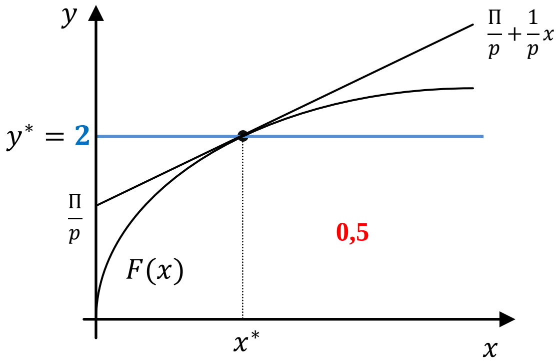
6) Que se passe-t-il si $p < 1$? Expliquer et représenter ce cas graphiquement. Quelle sont alors l'offre et la demande de facteur de la firme

Si $p < 1$, on a $y^* = 2p < 2$. Le prix de vente étant « faible », le niveau de production optimal de la firme est inférieur au niveau de la contrainte de débouchés. Cette dernière ne « gène » donc pas l'entreprise qui peut toujours réaliser son *first best* : (x^*, y^*) **0,5**



7) Même question si $p = 1$

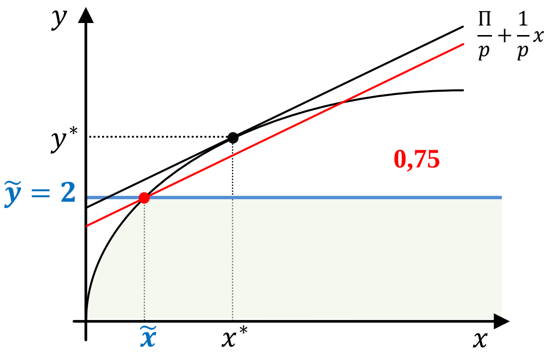
Si $p = 1$, on a $y^* = 2p = 2$. Le niveau de production optimal de la firme est juste égal au niveau de la contrainte de débouchés. Cette dernière ne « gène » donc toujours pas l'entreprise qui peut encore réaliser son *first best* : (x^*, y^*) **0,5**



8) Même question si $p > 1$

Si $p > 1$, on a $y^* = 2p > 2$. Le prix de vente étant « élevé », le niveau de production rentable de la firme est supérieur au niveau de la contrainte de débouchés. Cette dernière « gène » donc l'entreprise qui ne peut plus réaliser son *first best*. **0,25**

La firme se situe alors sur la plus haute des droites d'iso-profit compatibles avec, à la fois sa contrainte technologique $(y \leq F(x))$ et la contrainte de débouchés $(y \leq 2)$, ce qui revient à rester dans la zone verte. **0,25**



La plus haute des droites d'iso-profit possible est alors la droite rouge et le point optimal le point rouge (*second best*).
Dans ce cas, la firme réduit son offre de bien de y^* jusqu'au niveau de la contrainte de débouchés, $\tilde{y} = 2 < y^*$ et, en conséquence, réduit sa demande de facteur à un niveau $\tilde{x} = F^{-1}(2) = 1 < x^*$. **0,25**
Nota : le profit de la firme au *second best* est plus faible qu'au *first best* (droite d'iso-profit plus basse)