Première partie : le consommateur

Exercice 1 : Préférences et fonctions d'utilité

Soient les fonctions d'utilité $U(x,y) = \sqrt{xy}$ et $V(x,y) = x^2y^2$

1) Donner l'équation et représenter, dans le plan (x,y), les courbes d'indifférence associées à chaque fonction d'utilité. Vérifier que celles-ci sont bien convexes. Commentez.
2) Calculer, pour un panier de bien (x,y) quelconque, le taux marginal de substitution du bien y au bien x, associé à chaque fonction. Expliquez.
3) Peut on dire que les fonctions $U(\cdot)$ et $V(\cdot)$ représentent les mêmes préférences ? Expliquer.
4) Les fonctions d'utilité $F(x,y) = x^a y^b$ et $G(x,y) = ax + by$ représentent-elles les mêmes préférences ? Même question à propos de $F(x,y)$ et de $H(x,y) = a.\ln x + b.\ln y$

Exercice 2 : Fonctions de demandes marshaliennes

Soit un consommateur qui dispose d'un revenu R et dont les préférences sont représentées par la fonction d'utilité $U(x,y) = x\sqrt{y}$, dépendant des quantités consommées x et y de deux biens. Les prix des biens, strictement positifs, sont notés respectivement p_x et p_y.

1) Vérifier que les préférences sont strictement convexes.
2) Calculer les fonctions de demandes marshaliennes
3) Donner l'expression de la fonction d'utilité indirecte et montrer que le multiplicateur associé à la contrainte budgétaire s'interprète comme l'utilité marginale du revenu. Expliquez.
4) Mêmes questions que 1) et 2) mais avec la fonction d'utilité à trois biens : $U(x,y,z) = x\sqrt{y}\,z^2$. En notant p_x , p_y et p_z les prix, strictement positifs, des biens

Exercice 3 : Effet substitution et effet revenu

Soit un consommateur qui dispose d'un revenu R et dont les préférences sont représentées par la fonction d'utilité $U(x,y) = x^{1/4}y^{3/4}$, dépendant des quantités consommées x et y de deux biens. Les prix des biens, strictement positifs, sont notés respectivement p_x et p_y.

1) Ecrire l'équation de la contrainte budgétaire et la représenter graphiquement dans le plan (x,y)
2) Ecrire l'équation de la courbe d'indifférence de niveau U et montrer que cette courbe est strictement convexe
3) Déterminer, en fonction de R, p_x et p_y, les consommations optimales x^* et y^* de chacun des biens. En déduire la fonction d'utilité indirecte.
4) On suppose $R = 40$, $p_x = 10$ et $p_y = 30$. Calculer le point optimal $A = (x_A^*, y_A^*)$ et le niveau d'utilité atteint en ce point. Le représenter graphiquement ainsi que la contrainte budgétaire.
5) On suppose maintenant que le prix du bien x passe de $p_x = 10$ à $p_x' = 160$. Calculer le nouveau point optimal, que l'on notera C, ainsi que le niveau d'utilité atteint en ce point. Expliquer.
6) Quel revenu R' aurait-il fallu donner au consommateur pour que son utilité demeure inchangée malgré la hausse de prix du bien x ? Comparer R et R' et expliquer. Calculer le point optimal B associé à ce revenu R' et aux nouveaux prix $p_x' = 160$ et $p_y = 30$.
7) Représenter graphiquement les point A, B et C en distinguant clairement l'effet substitution et l'effet revenu.
8) Calculer précisément, pour chaque bien, la variation de la quantité consommée due à l'effet substitution et celle due à l'effet revenu. Expliquer. En quoi s'agit-il d'un cas particulier ?

Exercice 4 : Demande de loisir et offre de travail

On considère un consommateur dont la fonction d'utilité est $U(C,L) = C^{\alpha}L^{\beta}$ où $L = \ell_0 - \ell$ est le temps de loisir, défini comme la différence entre la dotation en temps du ménage ℓ_0 et le temps de travail effectif noté ℓ. On note w le taux de salaire nominal et p le prix du bien de consommation.

1) Y a-t-il convexité des préférences ? Donner le taux marginal de substitution consommation/loisir en un point quelconque.
2) Ecrire le programme du consommateur et déterminer ses fonctions de demande de bien, de demande de loisir et d'offre de travail. Commenter. Expliquer pourquoi la contrainte budgétaire est saturée à l'optimum.
3) Que se passe-t-il si w et p doublent ? Expliquer. En quoi cela est-il dû à la forme de la contrainte budgétaire ? Comment appelle-t-on cette propriété ?

Exercice 5 : Contraintes sur les variables endogènes

Soit un consommateur qui dispose d'un revenu R et dont les préférences sont représentées par la fonction d'utilité $U(x,y) = xy$, dépendant des quantités consommées x et y de deux biens. Les prix des biens, strictement positifs, sont notés respectivement p_x et p_y.

1) Déterminer, en fonction de R, p_x et p_y, les consommations optimales x^*et y^* de chacun des biens.
2) On suppose maintenant qu'il existe une contrainte de disponibilité pour le bien y qu’on écrit : $y \leq \bar{y} = 2$. Déterminer les consommations optimales $\hat{x}$ et $\hat{y}$ de chacun des biens, selon les valeurs des prix et du revenu.
3) Dans quel cas a-t-on $\hat{x} = x^*$ et $\hat{y} = y^*$? Dans quel cas a-t-on $\hat{x} \neq x^*$ et $\hat{y} \neq y^*$. Expliquez.
4) Représentez graphiquement les deux cas précédents. Commentez.

Exercice 6 : Biens non nécessaires

Soit un consommateur disposant d'un revenu R à dépenser pour l'achat de trois biens dont les prix sont notés $p_i > 0$ et les quantités consommées x_i , i = 1…3. La fonction d'utilité représentant les préférences, strictement convexes, est donnée par : $U(x_1, x_2, x_3\,) = (x_1 + 2){x_2}^3{x_3}^2$

1) Ecrire les conditions de Kuhn et Tucker que doit vérifier un vecteur $(x_1^*, x_2^*, x_3^*\,)$ qui réalise l'optimum du consommateur. Sont-elles suffisantes ?
2) Résoudre le système déterminé par les conditions précédentes (on distinguera deux cas selon la valeur de p_1 et on déterminera dans ces deux cas les fonctions de demande de chacun des biens).
3) Les fonctions de demande ainsi obtenues sont-elles homogènes par rapport à l'ensemble des variables prix et revenu ? Commentez.
4) Les prix des différents biens étant fixés, tracer dans les plans (R, x_1) et (R, x_2) les courbes d'Engel relatives aux deux premiers biens.

Exercice 7 : Programme dual du consommateur

Soit un consommateur qui dispose d'un revenu R et dont les préférences, strictement convexes, sont représentées par la fonction d'utilité $U(x,y) = x^3\sqrt{y}$, dépendant des quantités consommées x et y de deux biens. Les prix des biens, strictement positifs, sont notés respectivement p_x et p_y.

1) Dériver directement les demandes marshaliennes $x_i^*(P,R)$ en résolvant le programme primal du consommateur
2) Ecrire le programme permettant d'obtenir les demandes hicksiennes que l'on notera $\tilde{x}_i(P,U)$. Préciser les variables endogènes et les variables exogènes du problème.

3) Calculer l'expression $\tilde{x}_i(P,U)$ des fonctions de demandes hicksiennes et en déduire celle de la fonction de dépense $D(U,P)$. Que représente-t-elle ? Expliquer l'impact des prix et du niveau d'utilité sur $D(\cdot)$.

4) Expliquer comment, à partir de la fonction de dépense, on peut dériver la fonction d'utilité indirecte $v(p_x, p_y, R)$. Que représente-t-elle ? Expliquer l'impact des prix et du revenu sur $v(\cdot)$.

5) Montrer comment, à partir de 3) et 4) on peut retrouver les fonctions de demandes marshaliennes

Seconde partie : le producteur

Exercice 8 : Maximisation du profit avec un seul facteur de production

Soit une entreprise produisant un bien en quantité y en utilisant uniquement du travail. On note $p > 0$ le prix de vente du bien et $w > 0$ le taux de salaire nominal. L'environnement technologique est décrit par la fonction de production à un seul facteur $F(\ell) = 2\sqrt{\ell}$ où ℓ note le nombre d'heures de travail utilisées.

1) Déterminer la nature des rendements d'échelle. En quoi cela est-il important ?

2) Ecrire le programme (primal) de maximisation du profit de la firme et en déduire la demande de travail et l'offre de bien de l'entreprise. Montrer que celles-ci sont homogènes de degré 0 en w et p. Expliquer.

3) Donner l'expression du profit maximum réalisé par la firme. Commenter.

- On cherche maintenant à résoudre le problème de la firme en deux étapes (programme dual).

4) Déterminer dans un premier temps la fonction de coût de l'entreprise que l'on notera $C(y)$.

5) Ecrire le programme correspondant à la seconde étape du dual. Quelle propriété doit vérifier la fonction de coût pour que ce programme ait un sens ? Expliquer.

6) Déterminer, en résolvant le programme précédent, l'offre de bien de l'entreprise. En déduire sa demande de travail. Comparer aux résultats obtenus en 2).

Exercice 9 : Maximisation du profit avec deux facteurs de production

Soit une entreprise produisant un bien en quantité y à l'aide de deux inputs, le travail noté ℓ et le capital noté k. On note w le taux de salaire, c le coût d'usage du capital et p le prix de vente du bien (ces valeurs sont toutes strictement positives). Les caractéristiques technologiques de la firme sont définies par la fonction de production à deux facteurs :

$$F(\ell, k) = \ell^{\alpha} k^{\beta} \qquad \alpha > 0, \ \beta > 0$$

1) Quelle condition doit on imposer à α et β pour que le programme de maximisation du profit de l'entreprise ait un sens ? Que peut-on en conclure sur la nature des rendements d'échelle. Expliquer.

2) On pose pour simplifier $\alpha = \beta = 1/4$. Ecrire les conditions nécessaires du premier ordre et en déduire l'équation du sentier d'expansion. Tracer le sentier d'expansion dans le plan (ℓ, k). Déterminer l'élasticité de substitution entre les facteurs de production.

3) Déterminer l'offre de bien de l'entreprise ainsi que ses demandes de facteurs.

4) Quel est l'impact sur les demandes de facteurs et l'offre de bien d'une variation proportionnelle de w, c et p ? D'une hausse de p uniquement ? Expliquer pourquoi une augmentation du coût réel d'un facteur engendre une baisse de la demande de l'autre, alors même que les facteurs sont parfaitement substituables ?

- On cherche maintenant à résoudre le problème de la firme en deux étapes (problème dual).

5) Ecrire le programme permettant de déterminer la fonction de coût de l'entreprise ($1^{ère}$ étape du problème dual) ainsi que le lagrangien et les conditions d'optimalité associées

6) Résoudre le programme constitutif de cette première étape et déterminer les demandes de facteurs conditionnelles de la firme. En déduire la fonction de coût de l'entreprise que l'on notera $C(y)$.

7) On pose pour simplifier, $w = c = 1$. Résoudre la seconde étape du programme dual. En déduire l'offre de la firme ainsi que ses demandes de facteurs. Vérifier qu'elles coïncident bien avec celles obtenues en 3).

Exercice 10 : Contraintes sur les variables endogènes

Soit une firme produisant un bien y en utilisant deux inputs notés x_1 et x_2, à partir de la fonction de production $F(x_1, x_2) = (x_1\, x_2)^{1/3}$. Le prix de vente du bien est noté p tandis que les prix des deux inputs sont supposés identiques et égaux à c.

- On suppose dans un premier temps que la firme fait face à une contrainte d'approvisionnement pour l'input 2, que l'on écrit $x_2 \leq 27$

1) Ecrire le programme permettant, de déterminer les demandes de facteurs x_1^* et x_2^* et l'offre de l'entreprise y^* ainsi que les conditions de Kuhn et Tucker que doit vérifier un vecteur (y^*, x_1^*, x_2^*) qui réalise l'optimum du producteur.
2) Résoudre le système déterminé par les conditions précédentes et en déduire les demandes de facteurs et l'offre de l'entreprise en distinguant les différents cas possibles selon la valeur du prix de vente p.

- On suppose maintenant que la firme n'a pas de contrainte d'approvisionnement mais fait face à une contrainte de débouchés que l'on écrit $y \leq 4$

  Mêmes questions que 1) et 2)

Exercice 11 : Facteurs fixes – La distinction court terme/long terme

Soit une entreprise produisant un bien en quantité q à partir de la fonction de production :

$$F(x, y, z) = (x\, y\, z)^{1/3}$$

où x, y et z notent les facteurs de production utilisés dont les prix sont : $c_x = 1, c_y = 1, c_z = 1/2$.

On suppose qu'à court terme le volume de z est fixé au niveau $\bar{z} = 1$ tandis qu'à long terme, l'entreprise choisit librement le niveau de z.

1) Expliquer comment, dans ce problème, le long terme se différencie du court terme.
2) Calculer la fonction de coût à long terme
3) Calculer la fonction de coût à court terme
4) Quelle est la nature des rendements d'échelle à long terme ? à court terme ? Expliquer et tracer sur une même figure les courbes de coût marginal et de coût moyen à long terme et à court terme
5) Déterminer l'offre de l'entreprise à court terme et à long terme. Expliquer.

Exercice 12 : Passer du coût à court terme au coût à long terme

Soit une firme produisant un bien y en utilisant deux inputs notés $x_1$et x_2, à partir de la fonction de production $F(x_1, x_2) = x_1^{1/4} x_2^{1/4}$. Le prix de vente du bien est noté p tandis que le prix de chaque input est unitaire. On suppose que la quantité de facteur 2 est fixe à court terme mais que la firme peut librement choisir la quantité de ce facteur à long terme.

1) Déterminer la fonction de coût de long terme de l'entreprise, que l'on notera $C_{LT}(y)$
2) Déterminer la fonction de coût de court terme de l'entreprise, que l'on notera $C_{CT}(y)$. Commenter.
3) Calculer le coût marginal de production de court terme et le coût moyen de production de court terme. Les représenter graphiquement et commenter
4) Expliquer comment on peut calculer la fonction de coût de long terme, à partir de l'expression de la fonction de coût de court terme
5) Calculer les fonctions d'offre de l'entreprise à long terme et à court terme. Les représenter graphiquement et expliquer.