Université Evry-Val d'Essonne
Licences Science Economique et Gestion & Mathématique
Cours de Microéconomie – L2 – T. Laurent

Première partie : le consommateur

Exercice 1 : Préférences et fonctions d'utilité

Soient les fonctions d'utilité $\mathcal{U}(x,y) = \sqrt{xy}$ et $\mathcal{V}(x,y) = x^2y^2$.
1) Donner l'équation et représenter, dans le plan (x,y), les courbes d'indifférence associées à chaque fonction d'utilité. Vérifier que celles-ci sont bien convexes. Commentez.
2) Calculer, pour un panier de bien (x,y) quelconque, le taux marginal de substitution du bien y au bien x associé à chaque fonction. Expliquez.
3) Peut on dire que les fonctions $\mathcal{U}(\cdot)$ et $\mathcal{V}(\cdot)$ représentent les mêmes préférences ? Expliquer.
4) Les fonctions d'utilité $\mathcal{F}(x,y) = x^a y^b$ et $\mathcal{G}(x,y) = ax + by$ représentent-elles les mêmes préférences ? Même question à propos de $\mathcal{F}(\cdot)$ et de $\mathcal{H}(x,y) = a\log x + b\log y$.

Exercice 2 : Fonctions de demandes Marshaliennes

Soit un consommateur qui dispose d'un revenu R et dont les préférences sont représentées par la fonction d'utilité suivante, dépendant des quantités consommées de deux biens x et y :

$$\mathcal{U}(x,y) = x\sqrt{y}$$

Les prix des biens sont notés respectivement p_x et p_y.
1) Vérifier que les préférences sont strictement convexes.
2) Calculer les fonctions de demandes marshaliennes.
3) Mêmes questions avec la fonction d'utilité à 3 biens ci-dessous, en notant p_x, p_y et p_z les prix des biens

$$\mathcal{U}(x,y,z) = x\sqrt{y}z^2$$

Exercice 3 : Effet substitution et effet revenu

Soit un consommateur qui dispose d'un revenu R et dont les préférences sont représentées par la fonction d'utilité suivante, dépendant des quantités consommées de deux biens x et y :

$$\mathcal{U}(x,y) = x^{1/4}y^{3/4}$$

Les prix des biens sont notés respectivement p_x et p_y.
1) Ecrire l'équation de la contrainte budgétaire et la représenter graphiquement dans le plan (x,y).
2) Ecrire l'équation de la courbe d'indifférence de niveau $\overline{U}$ et montrer que cette courbe est bien convexe.
3) Déterminer, en fonction de R, p_x et p_y, les consommations optimales $x^\star$ et $y^\star$ de chacun des biens.
4) On suppose $R = 40$, $p_x = 10$ et $p_y = 30$. Calculer le point optimal $A = (x^\star, y^\star)$ et le niveau d'utilité atteint en ce point. Le représenter graphiquement ainsi que la contrainte budgétaire.
5) On suppose maintenant que le prix du bien x passe de $p_x = 10$ à $p'_x = 160$. Calculer le nouveau point optimal, que l'on notera C, ainsi que le niveau d'utilité atteint en ce point. Expliquer.
6) Quel revenu R' aurait-il fallu donner au consommateur pour que son utilité demeure inchangée malgré la hausse de prix du bien x ? Comparer R et R' et expliquer. Calculer le point optimal B associé à ce revenu R' et aux nouveaux prix $p'_x = 160$ et $p_y = 30$.
7) Représenter graphiquement les point A, B et C en distinguant clairement l'effet substitution et l'effet revenu.
8) Calculer précisément, pour chaque bien, la variation de la quantité consommée dûe à l'effet substitution et celle dûe à l'effet revenu. Expliquer. En quoi s'agit-il d'un cas particulier ?

Exercice 4 : Demande de loisir et offre de travail

On considère un consommateur dont la fonction d'utilité est $\mathcal{U}(C,L) = C^\alpha L^\beta$ où $L = \ell_0 - \ell$ est le temps de loisir, défini comme la différence entre la dotation en temps du ménage ℓ_0 et le temps de travail effectif noté ℓ. On note w le taux de salaire nominal et p le prix du bien de consommation.
1) Y a-t-il convexité des préférences ? Donner le taux marginal de substitution consommation/loisir en un point quelconque.

2) Ecrire le programme du consommateur et déterminer ses fonctions de demande de bien, de demande de loisir et d'offre de travail. Commenter. Expliquer pourquoi la contrainte budgétaire est saturée à l'optimum.
3) Que se passe-t-il si w et p doublent ? Expliquer. En quoi cela est-il dû à la forme de la contrainte budgétaire ? Comment appelle-t-on cette propriété ?

Exercice 5 : Contraintes sur les variables endogènes

Soit un consommateur qui dispose d'un revenu R et dont les préférences sont représentées par la fonction d'utilité suivante, dépendant des quantités consommées de deux biens x et y :

$$\mathcal{U}(x, y) = xy$$

Les prix des biens sont notés respectivement p_x et p_y.
1) Ecrire l'équation de la courbe d'indifférence de niveau $\overline{U}$ et montrer que cette courbe est bien convexe.
2) Déterminer, en fonction de R, p_x et p_y, les consommations optimales $x^\star$ et $y^\star$ de chacun des biens.
3) On suppose maintenant qu'il existe une contrainte de disponibilité pour le bien y : $y \leq 2$. Déterminer les consommations optimales $\widehat{x}$ et $\widehat{y}$ de chacun des biens, selon les valeurs de R et p_y.
4) Dans quel cas a-t-on $\widehat{x} = x^\star$et $\widehat{y} = y^\star$. Dans quel cas a-t-on $\widehat{x} \neq x^\star$et $\widehat{y} \neq y^\star$. Expliquez.
5) Représentez les deux cas précédents sur un même graphique.

Exercice 6 : Biens non nécessaires

Soit un consommateur disposant d'un revenu R à dépenser pour l'achat de trois biens dont les prix sont notés p_i et les quantités consommées x_i, $i = 1...3$. La fonction d'utilité représentant les préférences est donnée par:

$$\mathcal{U}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2)x_2^3 x_3^2$$

On suppose $x_1 \geq 0$, $x_2 > 0$ et $x_3 > 0$.
1) Ecrire les conditions de Kuhn et Tucker que doit vérifier un vecteur $(x_1^\star, x_2^\star, x_3^\star)$ qui réalise l'optimum de ce consommateur. Sont-elles suffisantes ?
2) Résoudre le système déterminé par les conditions nécessaires précédentes. On distinguera deux cas selon la valeur du rapport p_1/R. Déterminer dans ces deux cas les fonctions de demande de chacun des biens.

3) Les fonctions de demande ainsi obtenues sont-elles homogènes par rapport à l'ensemble des variables prix et revenu ? Montrer que le multiplicateur associé à la contrainte budgétaire peut s'interpréter comme l'utilité marginale du revenu.
4) Les prix des différents biens étant fixés, tracer dans les plans (R, x_1) et (R, x_2) les courbes d'Engel relatives aux deux premiers biens.

Exercice 7 : Programme dual du consommateur

Soit un consommateur disposant d'un revenu R à dépenser pour l'achat de deux biens dont les prix sont notés p_i et les quantités consommées $x_i,\ i = 1...2$. La fonction d'utilité représentant les préférences est donnée par:

$$\mathcal{U}(x_1, x_2) = x_1^3\sqrt{x_2}$$

1) Dériver directement les demandes marshaliennes $x_i^*(R, P)$ en résolvant le programme primal du consommateur.
2) Ecrire le programme permettant d'obtenir les demandes Hicksiennes que l'on notera $\widetilde{x}_i(U, P)$.
3) Calculer l'expression $\widetilde{x}_i(\cdot)$des fonctions de demandes Hicksiennes et en déduire celle de la fonction de dépense $\mathcal{D}(U, P)$. Que représente-t-elle ? Expliquer l'impact des prix et du niveau d'utilité sur $\mathcal{D}(\cdot)$.
4) Expliquer comment, à partir de la fonction de dépense, on peut dériver la fonction d'utilité indirecte $\mathcal{V}(R, P)$. Que représente-t-elle ? Expliquer l'impact des prix et du revenu sur $\mathcal{V}(\cdot)$.
5) Montrer comment, à partir de **3**) et **4**) on peut retrouver les fonctions de demandes marshaliennes.

Exercice 8 : Cas particuliers de préférences

Soit un consommateur disposant d'un revenu R et ayant le choix entre deux biens x et y de prix respectifs p_x et p_y. Déterminer ses demandes de biens dans les cas suivants. Représenter à chaque fois graphiquement les courbes d'indifférence, la contrainte budgétaire et la ou les solution(s):

- $\mathcal{U}(x, y) = x + y$ (courbe d'indifférence linéaires)
- $\mathcal{V}(x, y) = ax + by$ où $a > 0$ et $b > 0$ (courbe d'indifférence linéaires)
- $\mathcal{W}(x, y) = \min\ (ax, by)$ (courbe d'indifférence non dérivables)
- $\mathcal{Z}(x, y) = x^2 + y^2$ (courbe d'indifférence strictement concaves)

Seconde partie : le producteur

Exercice 9 : Maximisation du profit avec un seul facteur de production

Soit une entreprise produisant un bien en quantité q en utilisant uniquement du travail. On note p le prix de vente du bien produit et w le taux de salaire. L'environnement technologique est décrit par la fonction de production à un seul facteur : $f(\ell) = 2\sqrt{\ell}$.

1) Déterminer la nature des rendements d'échelle. En quoi cela est-il important ? Ecrire le programme de maximisation du profit de la firme. En déduire la demande de travail et l'offre de bien de l'entreprise. Vérifier que celles-ci sont homogènes de degré 0 en w et p. Expliquer. Donner l'expression du profit maximum réalisable par la firme. Commenter.

2) On cherche maintenant à résoudre le problème de la firme en deux temps (problème dual). On suppose pour cela que, dans une première étape, l'entreprise cherche à minimiser le coût total de production qu'il lui faut consentir pour produire un certain niveau de production q. Déterminer sa demande de travail conditionnelle à ce niveau de production. En déduire sa fonction de coût $\mathcal{C}(q)$.

3) Le seconde étape consiste à maximiser le profit, défini comme la différence entre les recettes correspondant à un certain niveau de production et le coût minimal que doit consentir la firme pour produire ce niveau :

$$\max_q \quad \Pi(q) = pq - \mathcal{C}(q)$$

Quelle propriété doit vérifier la fonction de coût pour que ce programme ait un sens ? Expliquer.

4) Déterminer, en résolvant le programme précédent, l'offre de bien de l'entreprise. En déduire sa demande de travail. Comparer aux résultats obtenus en **1)**. Expliquer.

5) Représenter graphiquement la fonction d'offre et la fonction de coût quand $w = 4$.

Exercice 10: Maximisation du profit avec deux facteurs de production

Soit une entreprise produisant un bien en quantité q à l'aide de deux inputs, le travail noté ℓ et le capital noté k. On note w le taux de salaire et c le coût d'usage du capital. Les caractéristiques technologiques de la firme sont résumées par une fonction de production à deux facteurs :

$$f(k,\ell) = \ell^\alpha k^\beta \qquad \alpha > 0, \quad \beta > 0$$

1) Quelle condition doit on imposer à α et β pour que le programme de maximisation du profit de l'entreprise ait un sens ? Que peut on en conclure sur la nature des rendements d'échelle. Expliquer.
2) On pose pour simplifier $\alpha = \beta = 1/4$. Ecrire les conditions nécessaires du premier ordre et en déduire l'équation du sentier d'expansion. Tracer le sentier d'expansion dans le plan (ℓ, k). Interpréter. Déterminer l'élasticité de substitution entre les facteurs de production.
3) Déterminer l'offre de bien de l'entreprise $q^s(p,w,c)$ ainsi que ses demandes de facteurs $k^d(p,w,c)$ et $\ell^d(p,w,c)$. Quel est l'impact sur les demandes de facteurs et le produit d'une variation proportionnelle de w, c et p ? D'une hausse de p uniquement ? D'une baisse de w ? Expliquer en particulier pourquoi une augmentation du prix d'un facteur de production se traduit par une baisse de la quantité consommée de l'autre, alors même que les facteurs sont parfaitement substituables.
4) Ecrire le problème dual du producteur. Résoudre la première étape et déterminer les demandes de facteurs conditionnelles $\tilde{k}^d(q,w,c)$ et $\tilde{\ell}^d(q,w,c)$. En déduire la fonction de coût de l'entreprise, $\mathcal{C}(q,w,c)$. Préciser le degré d'homogénéité de ces fonctions en w et c.
5) On pose maintenant, pour simplifier, $w = c = 1$. Résoudre la seconde étape du programme dual. En déduire l'offre de la firme ainsi que ses demandes de facteurs. Vérifier qu'elles coïncident bien avec celles obtenues en **3)**.

Exercice 11: Contraintes sur les variables endogènes

Soit une firme produisant un bien y en utilisant deux inputs notés x_1 et x_2, à partir de la fonction de production $\mathcal{F}(x_1,x_2) = (x_1.x_2)^{1/3}$. Le prix de vente du bien produit est noté p tandis que les prix des deux inputs sont supposés identiques et égaux à c.

• On suppose dans un premier temps que la firme fait face à une contrainte d'approvisionnement pour l'input 2, que l'on écrit $x_2 \leq 27$

1) Ecrire le programme permettant, de déterminer les demandes de facteurs x_1^*et x_2^* et l'offre de l'entreprise y^*ainsi que les conditions de Kuhn et Tucker que doit vérifier un vecteur $(y^*, x_1^\star, x_2^\star)$ qui réalise l'optimum du producteur.

2) Résoudre le système déterminé par les conditions précédentes et en déduire les demandes de facteurs et l'offre de l'entreprise en distingant les différents cas possibles selon la valeur du prix de vente p.

• On suppose maintenant que la firme n'a pas de contrainte d'approvisionnement mais fait face à une contrainte de débouchés que l'on écrit $y \leq 4$

3) Ecrire le programme permettant, de déterminer les demandes de facteurs x_1^*et x_2^* et l'offre de l'entreprise y^* ainsi que les conditions de Kuhn et Tucker que doit vérifier un vecteur $(y^*, x_1^\star, x_2^\star)$ qui réalise l'optimum du producteur.

4) Résoudre le système déterminé par les conditions précédentes et en déduire les demandes de facteurs et l'offre de l'entreprise en distingant les différents cas possibles selon la valeur du prix de vente p.

Exercice 12 : Facteurs fixes - Distinction court terme/long terme

Soit une entreprise produisant un bien en quantité q à partir de la fonction de production suivante :

$$f(x, y, z) = x^{1/3} y^{1/3} z^{1/3}$$

où x, y et z sont les inputs. On suppose qu'à court terme le volume de z est fixé, c'est à dire qu'on impose $z = \overline{z}$ à court terme; par contre, à long terme, l'entreprise peut choisir librement la valeur de z. On suppose de plus que les prix des inputs x, y et z sont respectivement égaux à 1, 1 et 1/2.

1) Expliquer comment, dans ce problème, le long terme se différencie du court terme. Calculer les fonctions de coût à court terme et à long terme.

2) Quelle est la nature des rendements d'échelle à court terme ? à long terme ? Expliquer et tracer sur une même figure les courbes de coût marginal et de coût moyen à court terme et à long terme.

3) Déterminer l'offre de l'entreprise à court terme et à long terme. Expliquer.

Exercice 13 : Passer du coût à court terme au coût à long terme

Soit une firme produisant un bien y en utilisant deux inputs notés $z_1$et z_2, à partir de la fonction de production $\mathcal{F}(z_1, z_2) = z_1^{1/4} z_2^{1/4}$ Le prix de vente du bien produit est noté p tandis que le prix de chaque input est supposé unitaire. On suppose que la quantité de facteur 2 est fixe à court terme mais que la firme peut librement choisir la quantité de ce facteur à long terme.

1) Déterminer la demande conditionnelle à court terme de facteur 1, que l'on notera $\widetilde{z}_1^{CT}$.

2) En déduire la fonction de coût de court terme de l'entreprise $\mathcal{C}_{CT}(.)$. Commenter.
3) Calculer le coût marginal de production de court terme et le coût moyen de production de court terme.
4) Représenter graphiquement le coût moyen calculé à la question précédente. Expliquer et commenter.
5) Déduire des questions précédentes l'offre de l'entreprise à court terme y_{CT}^{S}. Représenter graphiquement la fonction d'offre. Expliquer.
6) Ecrire le programme permettant, à partir de $\mathcal{C}_{CT}(.)$, de calculer la demande conditionnelle à long terme de facteur 2 et calculer cette demande que l'on notera $\tilde{z}_2^{LT}$.
7) En déduire la fonction de coût de long terme de l'entreprise $\mathcal{C}_{LT}(.)$
8) Calculer l'offre de l'entreprise à long terme y_{LT}^{S} et la représenter graphiquement. Comparer y_{CT}^{S} et y_{LT}^{S} et commenter.

Troisième partie : l'équilibre partiel

Exercice 14

Soit une firme, en situation concurrentielle, produisant un bien en quantité q à l'aide de deux inputs dont les quantités sont notées x_1 et x_2. On note p le prix du bien et c_1, c_2 les prix respectifs des deux inputs. L'environnement technologique est représenté par la fonction de production $\mathcal{F}(x_1, x_2) = (x_1 x_2)^{1/4}$ et la demande de bien par la fonction agrégée $\mathcal{D}(p) = 4/p$. On pose pour simplifier : $c_1 = c_2 = 1/4$.
On suppose, dans un premier temps, que la quantité du facteur 2 est fixée à court terme au niveau $\bar{x}_2 = 4$.
1) Déterminer la fonction de coût de court terme de l'entreprise et représenter sur un même graphique le coût marginal et le coût moyen. Justifier votre graphique en expliquant son lien avec la nature des rendements d'échelle.
2) Déterminer, à partir de la fonction de coût, l'offre de bien à court terme de l'entreprise. Expliquer.
3) En déduire le prix $p^\star_{CT}$ et les quantités $q^\star_{CT}$ échangées à l'équilibre de court terme.
4) Même question que la précédente si on avait eu $\mathcal{D}(p) = 1/p$. Expliquer.
On suppose maintenant qu'à long terme, la firme peut choisir librement le niveau du facteur 2 (la demande est donnée par la fonction initiale $D(p) = 4/p$).
5) Déduire, à partir de la fonction de coût de court terme, la quantité de facteur 2 utilisée à long terme par la firme pour produire de façon optimale une quantité q quelconque. En déduire la fonction de coût à long terme de l'entreprise.
6) Déterminer l'offre à long terme de l'entreprise. Comparer avec l'offre à court terme. Expliquer.
7) Calculer le prix de vente $p^\star_{LT}$ et les quantités $q^\star_{LT}$ échangées à l'équilibre de long terme. Représenter graphiquement, dans le plan (p, q), les équilibres de court terme et de long terme.

Exercice 15

On considère un marché en situation de concurrence parfaite sur lequel interviennent deux types de firmes caractérisées par des technologies différentes. Les firmes de type 1, indicées par i et au nombre de 2, sont caractérisées par des fonctions de coût identiques : $C_1(q_{1i}) = q_{1i}^2 + 1 \quad \forall i = 1, 2$ où q_{1i} désigne la quantité produite par la i*ème* firme de type 1. Les firmes de type 2, indicées par j et au nombre de 6, bénéficient de conditions de production moins avantageuses puisqu'elles sont caractérisées par les fonctions de coûts : $C_2(q_{2j}) = 3q_{2j}^2 + 3 \quad \forall j = 1, .., 6$. On note p le prix de vente du bien sur le marché et on suppose qu'une entreprise produit dès que cela lui permet d'obtenir un profit non négatif. Les consommateurs sont représentés par la fonction de demande agrégée : $\mathcal{D}(p) = 18 - \beta p$ avec $\beta > 0$.

1) Déterminer l'offre individuelle de chaque firme. En déduire la fonction d'offre globale $\mathcal{S}(p)$ et là représenter graphiquement. Expliquer.

2) Pour quelles valeurs de β existe-t-il un équilibre ? Commenter.

3) Que se passe-t-il si β est supérieur à 9 ? Que peut-on dire de cette situation ?

4) Montrer que, si $\beta > 3$, les entreprises les moins efficaces sont systématiquement exclues du marché quel que soit leur nombre et celui des autres firmes.

5) On suppose que $\beta = 1/2$; calculer le prix d'équilibre ainsi que le volume des transactions et les quantités produites par chaque type de firme à l'équilibre. Commenter.

Suite à une modification exogène des préférences des consommateurs, la demande devient plus sensible au prix de vente, ce qui se traduit par une augmentation de β qui passe de $1/2$ à 5.

6) Calculer le nouvel équilibre et les quantités produites par les deux types de firmes. Expliquer.

7) On considère maintenant que l'entrée sur le marché est libre et que les entrants potentiels ont accès à la même technologie que les firmes déjà implantées sur le marché. En déduire le nombre d'entreprises de chaque type présentes à long terme sur le marché, ainsi que le prix de vente et les quantités produites et échangées à l'équilibre de longue période. Expliquer et représenter graphiquement l'équilibre ainsi obtenu.

8) Montrer que le prix de vente d'équilibre de longue période est égal au minimum du coût moyen. Expliquer et représenter graphiquement, pour chaque firme présente à long terme sur le marché, ses courbes de coût moyen et de coût marginal ainsi que la quantité produite à l'équilibre de longue période.