Microéconomie avancée

Structures de marché et organisation industrielle

Introduction

		Produit	
		Homogène	**Différencié**
Nombre de firmes	**Important**	Concurrence parfaite *(petits agriculteurs)*	Concurrence monopolistique *(restaurants, écoles privées, boulangeries)*
	Limité	Oligopole *(électricité, gaz, TV câble, opérateurs téléphonie)*	Oligopole différencié *(voitures, sodas, téléphones)*
	Deux	Duopole *(Google/FaceBook pub en ligne)*	Duopole différencié *(Airbus/Boeing, Apple/Samsung)*
	Une	Monopole *(eau, SNCF)*	

Impact des structures de marché sur les prix et le bien être ?

	Nombre de producteurs	Type de produit	Pouvoir de la firme sur le prix	Barrières à l'entrée	Concurrence hors-prix	Profit à long terme
Concurrence parfaite	Beaucoup	Standardisé	Aucun $Prix=C_m$	Faible	Aucune	Nul
Concurrence monopolistique	Beaucoup	Différencié	Modéré $Prix>C_m$	Faible	Différenciation du produit, publicité	Nul
Oligopole	Peu	Standardisé ou différencié	Important $Prix>C_m$	Elevé	Différenciation du produit, publicité	Positif
Monopole	Un	Unique	Très élevé $Prix>>C_m$	Très élevé	Publicité	Positif

Plan du cours

0. Rappels : les comportements en concurrence parfaite
1. L'équilibre de concurrence parfaite
2. Monopole et discrimination par les prix
3. Oligopole et duopole
4. Différenciation des produits I : concurrence monopolistique
5. Différenciation des produits II : oligopole
6. Information et publicité

Pré-requis

Théorie des comportements du producteur en concurrence parfaite

- Techniques de base d'optimisation
- Maximisation du profit
- Fonction de coûts
- Détermination de la fonction d'offre et des demandes de facteurs
- Equilibre sur un marché

Références

- **Notes de cours** disponible en ligne sur eMedia
- *Eléments de Microéconomie : Théorie et applications*, Pierre PICARD, Montchrestien
- *Microéconomie : Cours et application*, Christophe HACHON, Reynald-Alexandre LAURENT, Nathan éd.
- *Analyse microéconomique*, Hal R. VARIAN, De Boeck éd.
- *Theory of industrial organization*, Jean TIROLE, MIT Press
- *Game Theory for Applied Economists*, Robert GIBBONS, Princeton University Press
- *Game Theory : Interactive Strategies in Economics and Management*, Aviad HEIFETZ, Cambridge University Press

Chapitre 0. - Rappels
Les comportements en concurrence parfaite

1ère partie : le consommateur

On suppose dans toute cette partie que les préférences du consommateur sont strictement convexes : cela équivaut à supposer que la fonction d'utilité est strictement quasi-concave *i.e.* que les courbes d'indifférence associées à la fonction d'utilité sont strictement convexes.

Sous ces hypothèses les conditions du second ordre associées au programme du consommateur sont satisfaites et les conditions du premier ordre, qui constituent l'objet de cette partie, sont suffisantes.

1. – Maximiser l'utilité : le programme *primal*

1.1. – Maximisation sous la seule contrainte budgétaire

Le problème s'écrit sous la forme d'un programme [P1]:

$$\underset{\{x_1,\dots,x_n\}}{\text{Max}} \quad U(x_1,\dots,x_n)$$
$$s.t. \quad \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq R$$

On suppose que tous les biens sont nécessaires : $\forall i,\ \ x_i = 0 \ \Rightarrow U(x_1,\dots,x_n) = 0$

Ce programme est appelé programme *first best* du consommateur.

Il a pour objectif de déterminer les demandes *marshaliennes* du consommateur : $X^* = (x_1^*,\dots,x_n^*)$

- Les variables endogènes sont : $x_1,\dots,x_n$
- Les variables exogènes sont : $p_1,\dots p_n$ et R

1.1.1. – Méthode par substitution

- **1ère étape : on montre que la contrainte budgétaire est nécessairement saturée à l'optimum**

Supposons $X^* = (x_1^*,\dots,x_n^*)$ optimal et tel que $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^* < R$. Notons alors $S = R - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^* > 0$. En appelant $\hat{X}$ le panier de biens dont les $n-1$ premières composante sont identiques à X^* tandis que la dernière est augmentée de $\frac{S}{p_n}$, soit $\hat{X} = (x_1^*,\dots,x_{n-1}^*, x_n^* + \frac{S}{p_n})$, on a :

(i) $\hat{X}$ respecte la contrainte budgétaire (puisque $\sum_{i=1}^{n} p_i \hat{x}_i = R$ par construction)

(ii) $\hat{X} \succ X^*$ puisque $\frac{S}{p_n} > 0$

Il s'ensuit que X^* ne peut pas être optimal. On a donc nécessairement à l'optimum : $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = R$ ■

- **2nde étape : on substitue la contrainte budgétaire saturée dans la fonction d'utilité**

Comme $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = R$ à l'optimum le programme [P1] a la même solution que le programme [P2] :

$$\underset{\{x_1,\dots,x_n\}}{\text{Max}} \quad U(x_1, \dots x_n)$$
$$s.t. \quad \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = R$$

En tirant x_n de la contrainte budgétaire saturée on a : $x_n = \frac{R-\sum_{i=1}^{n-1} p_i x_i}{p_n}$

En reportant alors cette expression dans la fonction $U(x_1, \dots x_n)$ on obtient la fonction :

$$Z(x_1, \dots, x_{n-1} \mid p_1, \dots p_n, R) = U\left(x_1, \dots, x_{n-1}, \underbrace{\frac{R - \sum_{i=1}^{n-1} p_i x_i}{p_n}}_{x_n}\right)$$

qu'il s'agit simplement de maximiser par rapport à $(x_1, \dots, x_{n-1})$.

Les conditions nécessaires du premier ordre sont : $\nabla Z = 0$ *i.e.* $\partial Z/\partial x_i = 0 \;\; \forall i = 1 \dots n-1$

Soit : $$U_{x_i}(\cdot) - U_{x_n}(\cdot)\frac{p_i}{p_n} = 0 \qquad \forall i = 1 \dots n-1$$

ou encore le système de $(n-1)$ équations à $(n-1)$ inconnues :

$$\frac{U_{x_i}(\cdot)}{U_{x_n}(\cdot)} = \frac{p_i}{p_n} \qquad \forall i = 1 \dots n-1$$

(on retrouve ici, pour tous les biens pris deux à deux, l'égalité entre le TMS et le rapport des prix ; ces conditions sont suffisantes si les préférences sont strictement convexes)

La résolution de ce système donne les demandes marshaliennes des $(n-1)$ premiers biens comme fonctions des variables exogènes : $x_i^* = x_i^*(p_1, \dots p_n, R) \quad \forall i = 1 \dots n-1$

En reportant celles-ci dans la contrainte budgétaire saturée on obtient enfin :

$$x_n^*(p_1, \dots p_n, R) = \frac{R - \sum_{i=1}^{n-1} p_i x_i^*(p_1, \dots p_n, R)}{p_n} \qquad ■$$

Nota : L'utilité à l'optimum $U^* = U(x_1^*, \dots, x_{n-1}^*)$ qui ne dépend que des variables exogènes du programme est appelée *fonction d'utilité indirecte* et notée $\mathrm{V}(p_1, \dots p_n, R)$

On a bien sur : $\mathcal{V}_{p_i}(\cdot) < 0 \;\; \forall i = 1 \dots n$ et $\mathcal{V}_R(\cdot) > 0$

1.1.2. – Méthode de Kuhn & Tucker

Le lagrangien associé au programme [P1] est :

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda \mid p_1, \dots p_n, R) = U(x_1, \dots, x_n) + \lambda\left(R - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)$$

Où $\lambda \geq 0$ est le multiplicateur associé à la contrainte budgétaire.

Les conditions nécessaires d'optimalité sont :

(i) $\partial L / \partial x_i = 0 \;\; \forall i = 1 \dots n$

(ii) $\lambda(R - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i) = 0$ (relation d'exclusion)

Correspondant au système de (*n*+1) équations à (*n*+1) inconnues ($x_1, \dots, x_n$ et λ) :

$$U_{x_1}(\cdot) = \lambda p_1 \qquad [1]$$

$$U_{x_2}(\cdot) = \lambda p_2 \qquad [2]$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$U_{x_n}(\cdot) = \lambda p_n \qquad [n]$$

$$\lambda\left(R - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) = 0 \qquad [n+1]$$

- Résolution

De [1] on tire $\lambda = \frac{U_{x_1}(\cdot)}{p_1} > 0$

D'après [*n*+1] on a donc : $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = R$

La contrainte budgétaire est saturée à l'optimum.

En formant les rapportss $\frac{[1]}{[i]}$ $\forall i = 2 \dots n$ on obtient le système de *n* équations à *n* inconnues

$$\frac{U_{x_1}(\cdot)}{U_{x_i}(\cdot)} = \frac{p_1}{p_i} \qquad \forall i = 2 \dots n$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = R$$

Dont la résolution donne directement les fonctions de demande marshaliennes:

$$x_i^* = x_i^*(p_1, \dots p_n, R), \quad i = 1 \dots n \quad \blacksquare$$

1.1.3. – Exemple

Cas à 2 biens avec $U(x_1, x_2) = x_1 \, x_2$

Le programme [P1] s'écrit dans ce cas :

$$\max_{\{x_1, x_2\}} \; U(x_1, x_2)$$

$$s.t. \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq R$$

- **Méthode par substitution**

On montre dans une première étape (*cf.* 1.1.1.) qu'on a $p_1x_1 + p_2x_2 = R$ à l'optimum

On en déduit : $x_2 = \frac{R-p_1x_1}{p_2}$

En reportant cette expression de x_2 dans $U(x_1, x_2)$ on obtient la fonction :

$$Z(x_1 \mid p_1, p_2, R) = U\left(x_1, \frac{R - p_1x_1}{p_2}\right) = x_1\left(\frac{R - p_1x_1}{p_2}\right)$$

La condition du premier ordre est alors :

$$Z'(x_1) = \left(\frac{R - p_1x_1}{p_2}\right) - \frac{p_1}{p_2}x_1 = 0$$

$$i.e. \quad x_1^* = \frac{R}{2p_1}$$

En reportant cette expression de x_1^* dans $p_1x_1 + p_2x_2 = R$, on obtient enfin :

$$x_2^* = \frac{R}{2p_2} \qquad \blacksquare$$

La fonction d'utilité indirecte est alors : $U(x_1^*, x_2^*) = x_1^*.x_2^* = \frac{R^2}{4p_1p_2} = \mathrm{V}(p_1, p_2, R)$

- **Méthode de Kuhn & Tucker**

Le lagrangien associé au programme [P1] est :

$$L(x_1, x_2, \lambda \mid p_1, p_2, R) = U(x_1, x_2) + \lambda(R - p_1x_1 - p_2x_2)$$

Les conditions du 1[er] ordre sont alors :

$$U_{x_1}(\cdot) = \lambda p_1 \qquad [1]$$

$$U_{x_2}(\cdot) = \lambda p_2 \qquad [2]$$

$$\lambda(R - p_1x_1 - p_2x_2) = 0 \qquad [3]$$

De [1] on tire $\lambda = \frac{U_{x_1}(\cdot)}{p_1} > 0$. On a donc d'après [3] : $R - p_1x_1 - p_2x_2 = 0$ [4]

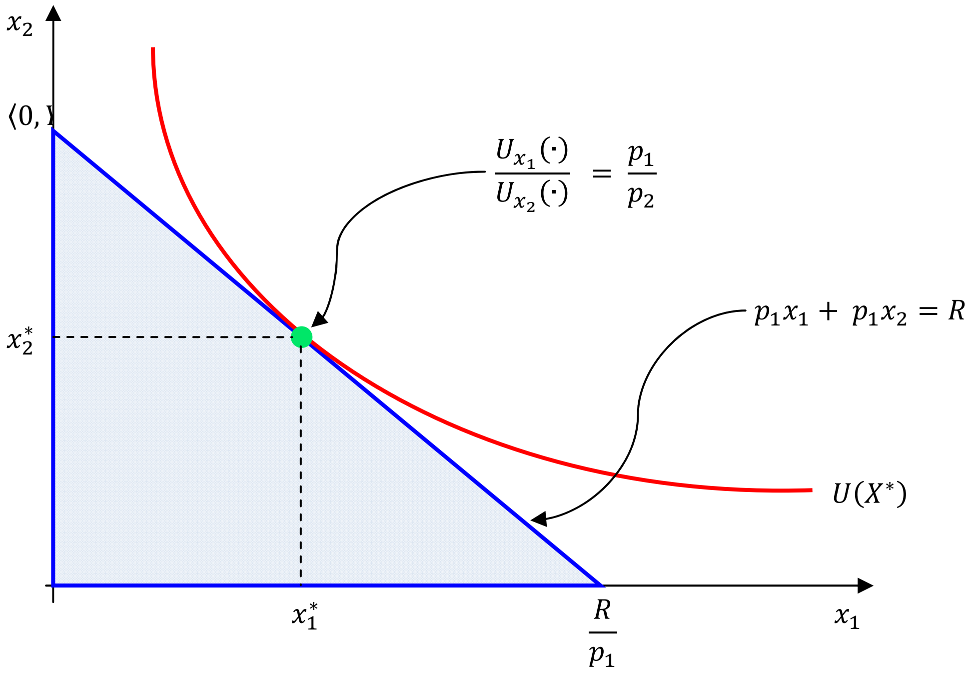
La contrainte budgétaire est saturée.

En formant le rapport de [1] et [2], on a d'autre part : $\frac{U_{x_1}(\cdot)}{U_{x_2}(\cdot)} = \frac{p_1}{p_2}$ $i.e.$ $\frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2}$

Soit $p_1x_1 = p_2x_2$. En reportant dans [4], on obtient alors immédiatement :

$$x_1^* = \frac{R}{2p_1} \quad \text{et} \quad x_2^* = \frac{R}{2p_2} \qquad \blacksquare$$

1.1.4. – Représentation graphique



2. – Maximiser l'utilité : le programme *dual*

On résout ici le programme du consommateur en 2 étapes :

- 1ère étape : détermination des demandes *hicksiennes* et de la *fonction de dépense*
- 2nde étape : détermination des demandes marshaliennes

2.1. – 1ère étape : Détermination des demandes *hicksiennes*

On cherche ici la dépense minimale qui permet d'obtenir un niveau d'utilité U donné.

Le problème s'écrit sous la forme d'un programme [P5]:

$$\underset{\{x_1,\dots,x_n\}}{\text{Min}} \quad D(x_1, \dots, x_n \mid p_1, \dots, p_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

$$s.t. \quad U(x_1, \dots, x_n) \geq U$$

Les variables endogènes sont : $x_1, \dots, x_n$

Les variables exogènes sont : $p_1, \dots p_n$ et U

Le programme a pour objectif de déterminer les demandes *hicksiennes* du consommateur $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ et la fonction de dépense : $D(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$

Le lagrangien associé au programme [P5] est :

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda \mid p_1, \dots, p_n, U) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i - \lambda(U(x_1, \dots, x_n) - U)$$

Où $\lambda \geq 0$ est le multiplicateur associé à la contrainte

Les conditions nécessaires d'optimalité sont alors :

(i) $\partial L / \partial x_i = 0 \quad \forall i = 1 \dots n$

(ii) $\lambda(U(x_1, \dots, x_n) - U) = 0$ (relation d'exclusion)

On a ainsi un système de (n+1) équations à (n+1) inconnues ($x_1, \dots, x_n$ et λ) :

$$\begin{array}{ccc} p_1 = \lambda U_{x_1}(\cdot) & & [1] \\ p_2 = \lambda U_{x_2}(\cdot) & & [2] \\ \vdots \quad \vdots & & \vdots \\ p_n = \lambda U_{x_n}(\cdot) & & [n] \\ \lambda(U(x_1, \dots, x_n) - U) = 0 & & [n+1] \end{array}$$

- Résolution

De [1] on tire $\lambda = \frac{p_1}{U_{x_1}(\cdot)} > 0$

D'après [n+1] on a donc : $U(x_1, \dots, x_n) = U$

En formant d'autre part les rapports $\frac{[1]}{[i]}$ $\forall i = 2 \dots n$ on obtient le système de n équations à n inconnues :

$$\frac{U_{x_1}(\cdot)}{U_{x_i}(\cdot)} = \frac{p_1}{p_i} \quad \forall i = 2 \dots n$$

$$U(x_1, \dots, x_n) = U$$

Dont la résolution donne directement les n fonctions de demande *hicksiennes* qui dépendent des seules variables exogènes du problème : $\tilde{x}_i(p_1, \dots p_n, U)$, $i = 1 \dots n$

La fonction de dépense est alors $D(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n \mid p_1, \dots, p_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i \, \tilde{x}_i(p_1, \dots p_n, U)$ qui ne dépend également que des variables exogènes du problème et est notée : $\mathcal{D}(p_1, \dots p_n, U)$ ■

2.2. – 2nde étape : des demandes *hicksiennes* aux demandes *marshaliennes*

Cette étape consiste à identifier les demandes *marshaliennes* $X^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ à partir des demandes *hicksiennes* $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ et de la fonction de dépense

On calcule pour cela le plus haut niveau d'utilité que peut atteindre le consommateur compte tenu de son revenu R

Le problème s'écrit sous la forme d'un programme [P6]:

$$\underset{\{U\}}{\text{Max}} \quad U$$
$$s.t. \quad \mathcal{D}(p_1, \dots p_n, U) = \sum_{i=1}^{n} p_i \tilde{x}_i(p_1, \dots p_n, U) \leq R$$

La variable endogène est : U

Les variables exogènes sont : $p_1, \dots p_n$ et R

Comme il s'agit de trouver le « plus grand » U compatible avec la contrainte budgétaire, la solution est triviale et définie par :

$$\mathcal{D}(p_1, \dots p_n, U) = R$$

dont la résolution en U donne directement la fonction d'utilité indirecte $U^* = \mathrm{V}(p_1, \dots, p_n, R)$

En reportant cette dernière dans les *n* demandes *hicksiennes* on obtient les *n* demandes *marshaliennes* :

$$\tilde{x}_i(p_1, \dots, p_n, \mathrm{V}(p_1, \dots, p_n, R)) = x_i^*(p_1, \dots, p_n, R) \qquad i = 1, \dots, n \quad ■$$

2.3. – Exemple

Cas à 2 biens avec $U(x_1, x_2) = x_1 \, x_2$

- **1ère étape :**

$$\underset{\{x_1, x_2\}}{\text{Min}} \quad D(x_1, x_2 \mid p_1, p_2) = p_1 x_1 + p_2 x_2$$
$$s.t. \quad x_1 \, x_2 \geq U$$

Le lagrangien associé au programme est

$$L(x_1, x_2, \lambda \mid p_1, p_2, U) = p_1 x_1 + p_2 x_2 - \lambda(x_1 \, x_2 - U)$$

Où $\lambda \geq 0$ est le multiplicateur associé à la contrainte

Les conditions du premier ordre associées sont :

$$\begin{aligned} \partial L / \partial x_1 &= p_1 - \lambda x_2 = 0 \quad [1] \\ \partial L / \partial x_2 &= p_2 - \lambda x_1 = 0 \quad [2] \\ \lambda(x_1 \, x_2 - U) &= 0 \quad [3] \end{aligned}$$

Comme x_2 est strictement positif (pour que la contrainte soit respectée), on a d'après [1]: $\lambda = \frac{p_1}{x_2} > 0$

D'après [3], on a donc : $\quad x_1 \, x_2 = U \qquad [5]$

Et en formant le rapport $\frac{[1]}{[2]}$: $\quad p_1 x_1 = p_2 x_2 \quad [6]$

En résolvant [5]-[6] en x_1 et x_2, on obtient alors les demandes hicksiennes :

$$\tilde{x}_1(p_1, p_2, U) = \sqrt{\frac{p_2 U}{p_1}} \qquad \text{et} \qquad \tilde{x}_2(p_1, p_2, U) = \sqrt{\frac{p_1 U}{p_2}}$$

Dont on déduit la fonction de dépense :

$$\mathcal{D}(p_1, p_2, U) = p_1\tilde{x}_1(\cdot) + p_2\tilde{x}_2(\cdot) = 2\sqrt{p_1p_2U}$$

- **2ème étape :**

La fonction d'utilité indirecte est donnée par la résolution en U de l'équation :

$$\mathcal{D}(p_1, p_2, U) = 2\sqrt{p_1p_2U} = R$$

Soit : $U^* = \frac{R^2}{4p_1p_2} = \mathcal{V}(p_1,\ p_2, R)$

En reportant alors U^* dans les demandes *hicksiennes*, on obtient les demandes *marshaliennes* :

$$x_1^* = \tilde{x}_1(p_1, p_2, U^*) = \sqrt{\frac{p_2U^*}{p_1}} = \frac{R}{2p_1}$$

$$x_2^* = \tilde{x}_2(p_1, p_2, U^*) = \sqrt{\frac{p_1U^*}{p_2}} = \frac{R}{2p_2} \qquad \blacksquare$$

2ème partie : le producteur

On suppose dans toute cette partie que la fonction de production de l'entreprise est strictement concave : cela équivaut à supposer que les rendements d'échelle sont strictement décroissants *i.e.* que la fonction profit est strictement concave.

Sous ces hypothèses les conditions du second ordre associées au programme du producteur sont satisfaites et les conditions du premier ordre, qui constituent l'objet de cette partie, sont suffisantes.

1. – Maximiser le profit : le programme *primal*

1.1. – Maximisation sous la seule contrainte technologique

Le problème s'écrit sous la forme d'un programme [P1]:

$$\underset{\{Y, x_1, \dots, x_n\}}{\text{Max}} \quad \Pi(Y, x_1, \dots, x_n \mid p, c_1, \dots, c_n) = pY - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$
$$s.t. \qquad Y \leq F(x_1, \dots, x_n)$$

Ce programme est appelé programme *first best* du producteur

Il a pour objectif de déterminer :

- les *demandes de facteurs* : $X^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ – notées également $X^d = (x_1^d, \dots, x_n^d)$
- l'*offre de bien* Y^* de la firme – notée également Y^s

Les variables endogènes sont : $Y, x_1, \dots, x_n$

Les variables exogènes : $p, c_1, \dots, c_n$

1.1.1. – Méthode par substitution

- **1ère étape : on montre que la contrainte technologique est nécessairement saturée à l'optimum**

Notons $X^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ et supposons (Y^*, X^*) optimal avec $Y^* < F(x_1^*, \dots, x_n^*)$. Le profit associé à ce « couple » inputs-output est alors $\Pi(Y^*, X^*) = pY^* - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i^*$.

Puisque $Y^* < F(x_1^*, \dots, x_n^*)$, $\exists \varepsilon > 0$ tel que $Y^* = F(\hat{X})$, où $\hat{X}$ est le panier d'inputs dont les $n-1$ premières composante sont identiques à X^* tandis que la dernière est diminuée de ε, soit $\hat{X} = (x_1^*, \dots, x_{n-1}^*, x_n^* - \varepsilon)$.

Considérons alors le « couple » inputs-output $(Y^*, \hat{X})$

(i) $(Y^*, \hat{X})$ respecte la contrainte technologique (puisque $Y^* = F(\hat{X})$ par construction)

(ii) $\Pi(Y^*, \hat{X}) > \Pi(Y^*, X^*)$ puisque $\Pi(Y^*, \hat{X}) - \Pi(Y^*, X^*) = c_n \varepsilon > 0$

Il s'ensuit que (Y^*, X^*) ne peut pas être optimal puisque la firme préfère $(Y^*, \hat{X})$ qui est réalisable. On a donc nécessairement à l'optimum : $Y = F(x_1, \dots, x_n)$ ■

- **2nde étape : on substitue la contrainte technologique saturée dans le profit à maximiser**

Comme $Y = F(x_1, \dots, x_n)$ à l'optimum, le programme [P1] a la même solution que le programme [P2]:

$$\max_{\{Y, x_1, \dots, x_n\}} \Pi(Y, x_1, \dots, x_n \mid p, c_1, \dots, c_n) = pY - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$
$$s.t. \quad Y = F(x_1, \dots, x_n)$$

En remplaçant alors Y par $F(x_1, \dots, x_n)$ dans l'expression du profit à maximiser on obtient la fonction :

$$\pi(x_1, \dots, x_n \mid p, c_1, \dots, c_n) = pF(x_1, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

qu'il s'agit de maximiser en $(x_1, \dots, x_n)$

Les conditions nécessaires du premier ordre sont alors : $\nabla\pi = 0$ *i.e.* $\partial\pi/\partial x_i = 0 \quad \forall i = 1 \dots n$

Soit le système de n équations à n inconnues:

$$pF_{x_i}(\cdot) - c_i = 0 \qquad \forall i = 1 \dots n$$

Nota : on retrouve ici, pour tous les facteurs de production, l'égalité entre la productivité marginale $F_{x_i}(\cdot)$ et le coût réel du facteur $\frac{c_i}{p}$; ces conditions sont suffisantes si la fonction de production est strictement concave *i.e.* si les rendements sont strictement décroissants

La résolution de ce système en $x_1, \dots, x_n$ donne les demandes de facteurs de la firme :

$$x_i^* = x_i^*(p, c_1, \dots, c_n), \quad i = 1, \dots, n \qquad \text{avec} \qquad \frac{\partial x_i^*}{\partial p} > 0 \ \forall i \quad \text{et} \quad \frac{\partial x_i^*}{\partial c_j} < 0 \ \forall i, j$$

En reportant celles-ci dans la contrainte technologique saturée on obtient finalement l'offre de l'entreprise :

$$Y^* = F(x_1^*, \dots, x_n^*) = Y^*(p, c_1, \dots, c_n) \quad \text{avec} \quad \frac{\partial Y^*}{\partial p} > 0 \ \forall i \quad \text{et} \quad \frac{\partial Y^*}{\partial c_i} < 0 \ \forall i \ \blacksquare$$

1.1.2. – Méthode de Kuhn & Tucker

Le lagrangien associé au programme [P1] est :

$$L(Y, x_1, \dots, x_n, \lambda \mid p, c_1, \dots, c_n) = pY - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + \lambda(F(x_1, \dots, x_n) - Y)$$

Où $\lambda \geq 0$ est le multiplicateur associé à la contrainte technologique

Les conditions nécessaires d'optimalité sont :

(i) $\partial L/\partial Y = 0$ et $\partial L/\partial x_i = 0 \ \forall i = 1 \dots n$

(ii) $\lambda(F(x_1, \dots, x_n) - Y) = 0$ (relation d'exclusion)

Soit un système de (n+2) équations à (n+2) inconnues ($Y, x_1, \dots, x_n$ et λ) :

$$\begin{array}{rcl} p = \lambda & & [1] \\ c_1 = \lambda F_{x_1}(\cdot) & & [2] \\ \vdots \quad \vdots & & \vdots \\ c_n = \lambda F_{x_n}(\cdot) & & [n+1] \\ \lambda(F(x_1, \dots, x_n) - Y) = 0 & & [n+2] \end{array}$$

- Résolution

De [1] on tire $\lambda = p > 0$

D'après [n+2] on a donc : $Y = F(x_1, \dots, x_n)$

La contrainte technologique est saturée à l'optimum.

En remplaçant λ par p dans les équations [2] à $[n+1]$ on obtient donc le système de $n+1$ équations à $n+1$ inconnues $(Y, x_1, \dots, x_n)$

$$c_i = pF_{x_i}(\cdot) \qquad \forall i = 1 \dots n$$

$$Y = F(x_1, \dots, x_n)$$

Dont la résolution en $(Y, x_1, \dots, x_n)$ donne directement les demandes de facteurs et l'offre de bien :

$$x_i^* = x_i^*(p, c_1, \dots, c_n), \quad i = 1, \dots, n \quad \text{et} \quad Y^* = Y^*(p, c_1, \dots, c_n)$$

1.1.3. – Exemple

Cas à 2 inputs avec $F(x_1, x_2) = {x_1}^{1/4}\, {x_2}^{1/4}$ et $c_1 = c_2 = 1$

Dans ce cas le programme [P1] est :

$$\underset{\{Y,x_1,x_2\}}{\text{Max}} \quad \Pi(Y, x_1, x_2 \mid p, c_1, c_2) = pY - (c_1x_1 + c_2x_2)$$

$$s.t. \quad Y \leq F(x_1, x_2)$$

- **Méthode par substitution**

On montre dans une première étape (*cf.* supra) que $Y = F(x_1, x_2)$ à l'optimum

En reportant cette expression de Y dans $\Pi(\cdot)$ on obtient la fonction :

$$\pi(x_1, x_2 \mid p, c_1, c_2) = pF(x_1, x_2) - c_1x_1 - c_2x_2$$

qu'il s'agit donc de maximiser en (x_1, x_2)

Les deux conditions du premier ordre sont alors :

$$\partial\pi/\partial x_1 = pF_{x_1}(\cdot) - c_1 = 0 \qquad i.e. \quad {x_1}^{-3/4}\,{x_2}^{1/4} = \frac{4}{p}$$

$$\partial\pi/\partial x_2 = pF_{x_2}(\cdot) - c_2 = 0 \qquad i.e. \quad {x_1}^{1/4}\,{x_2}^{-3/4} = \frac{4}{p}$$

En résolvant ce système de 2 équations à 2 inconnues on obtient :

$$x_1^* = x_2^* = \frac{p^2}{16}$$

Et en reportant ces demandes de facteurs dans la contrainte technologique saturée on obtient l'offre de l'entreprise :

$$Y^* = F(x_1^*, x_2^*) = x_1^{*1/4}\,x_2^{*1/4} = \frac{p}{4} \qquad \blacksquare$$

- **Méthode de Kuhn & Tucker**

Le lagrangien associé au programme [P1] est :

$$L(Y, x_1, x_2, \lambda \mid p, c_1, c_2) = pY - c_1x_1 - c_2x_2 + \lambda(F(x_1, x_2) - Y)$$

Les conditions nécessaires d'optimalité sont alors :

$$\partial L/\partial Y = p - \lambda = 0 \qquad [1]$$

$$\partial L/\partial x_1 = -c_1 + \lambda F_{x_1}(\cdot) = 0 \qquad [2]$$

$$\partial L/\partial x_2 = -c_2 + \lambda F_{x_2}(\cdot) = 0 \qquad [3]$$

$$\lambda(F(x_1, x_2) - Y) = 0 \qquad [4]$$

De [1] on tire $\lambda = p > 0$

D'après [4] on a donc : $Y = F(x_1, x_2)$

En remplaçant λ par p dans les équations [2] et [3] on obtient donc le système de 3 équations à 3 inconnues

$$\begin{cases} c_1 = pF_{x_1}(\cdot) \\ c_2 = pF_{x_2}(\cdot) \\ Y = F(x_1, x_2) \end{cases} \quad i.e. \quad \begin{cases} 4 = p{x_1}^{-3/4}\,{x_2}^{1/4} & [5] \\ 4 = p{x_1}^{1/4}\,{x_2}^{-3/4} & [6] \\ Y = {x_1}^{1/4}\,{x_2}^{1/4} & [7] \end{cases}$$

En formant le rapport $\frac{[5]}{[6]}$ on remarque qu'on a $x_1 = x_2$ à l'optimum

En remplaçant alors x_2 par x_1 dans [5] et en résolvant on a $x_1^* = \frac{p^2}{16} \Rightarrow x_2^* = \frac{p^2}{16}$

En reportant ces valeurs dans [7] on obtient : $Y^* = {x_1^*}^{1/4}\ {x_1^*}^{1/4} = \frac{p}{4}$ ■

1.1.4. – Représentation graphique

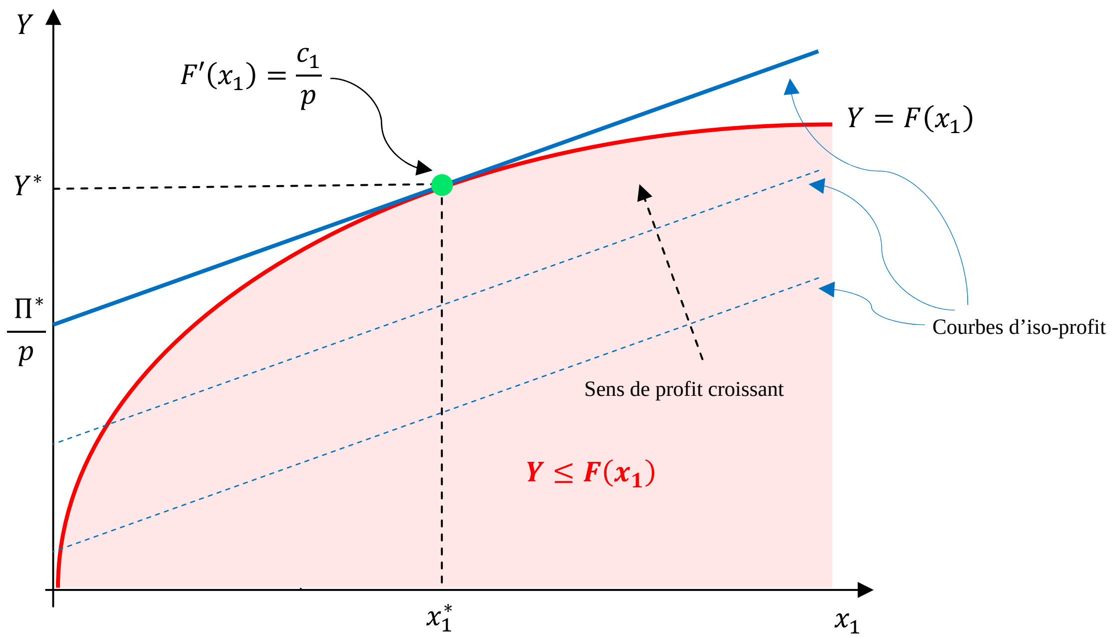
Nota : seul le cas à un seul facteur peut être représenté graphiquement

Dans ce cas le programme [1] s'écrit :

$$\underset{\{Y, x_1\}}{\text{Max}} \quad \Pi(Y, x_1 \mid p, c_1) = pY - c_1 x_1$$

$$s.t. \quad Y \leq F(x_1)$$

Et l'équation d'une courbe d'iso-profit de niveau Π quelconque est : $pY - c_1x_1 = \Pi$ *i.e.* $Y = \frac{c_1}{p}x_1 + \frac{\Pi}{\text{p}}$



A l'optimum on a simultanément : $Y = F(x_1)$ et $F'(x_1) = \frac{c_1}{p}$ ■

2. – Maximiser le profit : le programme *dual*

On résout ici le programme de la firme en 2 étapes :

- 1ère étape : détermination des demandes de facteurs *conditionnelles* et de la fonction de coût

- 2^{nde} étape : détermination des demandes de facteurs et de l'offre de la firme

2.1. – 1ère étape : Détermination de la fonction de coût

On cherche ici le coût minimal permettant de produire un niveau Y donné

Le problème s'écrit sous la forme d'un programme [P5]:

$$\underset{\{x_1,\dots,x_n\}}{\text{Min}} \quad C(x_1,\dots,x_n \mid c_1,\dots,c_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$s.t. \quad F(x_1,\dots,x_n) \geq Y$$

Les variables endogènes sont : $x_1, \dots, x_n$

Les variables exogènes sont : $c_1, \dots c_n$ et Y

Le programme a pour objectif de déterminer les demandes de facteurs *conditionnelles* de la firme $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ et la fonction de coût : $C(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n \mid c_1, \dots, c_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i \tilde{x}_i$

Le lagrangien associé au programme [P5] est :

$$L(x_1,\dots,x_n,\lambda \mid c_1,\dots,c_n,Y) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i - \lambda(F(x_1,\dots,x_n) - Y)$$

Où $\lambda \geq 0$ est le multiplicateur associé à la contrainte

Les conditions nécessaires d'optimalité sont alors :

(i) $\partial L / \partial x_i = 0, \ \forall i = 1 \dots n$

(ii) $\lambda(F(x_1,\dots,x_n) - Y) = 0$ (relation d'exclusion)

On a ainsi le système de (n+1) équations à (n+1) inconnues ($x_1, \dots, x_n$ et λ) :

$$\begin{array}{rcl} c_1 = \lambda F_{x_1}(\cdot) & & [1] \\ c_2 = \lambda F_{x_2}(\cdot) & & [2] \\ \vdots \qquad \vdots & & \vdots \\ c_n = \lambda F_{x_n}(\cdot) & & [n] \\ \lambda(F(x_1,\dots,x_n) - Y) = 0 & & [n+1] \end{array}$$

- Résolution

De [1] on tire $\lambda = \frac{c_1}{F_{x_1}(\cdot)} > 0$

D'après [n+1] on a donc : $F(x_1,\dots,x_n) = Y$

En formant d'autre part les rapports $\frac{[1]}{[i]}$ $\forall i = 2 \dots n$ on obtient le système de n équations à n inconnues :

$$\frac{F_{x_1}(\cdot)}{F_{x_i}(\cdot)} = \frac{c_1}{c_i} \qquad \forall i = 2 \dots n$$
$$F(x_1, \dots, x_n) = Y$$

Dont la résolution donne directement les n demandes de facteurs *conditionnelles* qui dépendent des seules variables exogènes du problème : $\tilde{x}_i(c_1, \dots c_n, Y),\ i = 1 \dots n$

La fonction de coûts est alors $C(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n \mid c_1, \dots, c_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i\, \tilde{x}_i(c_1, \dots c_n, Y) = \mathbb{C}(c_1, \dots c_n, Y)$ qui dépend également des seules variables exogènes du problème ■

2.2. – 2nde étape : des demandes *conditionnelles* aux demandes de facteurs

Cette étape consiste à identifier l'offre de bien Y^* et les demandes de facteurs $X^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ de la firme, à partir de la fonction de coûts et des demandes de facteurs *conditionnelles* $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$

On calcule pour cela le niveau optimal de production, *i.e.* celui qui maximise le profit, compte tenu de la fonction de coûts identifiée à la première étape

Le problème s'écrit sous la forme d'un programme sans contrainte [P6]:

$$\underset{\{Y\}}{\text{Max}} \quad \Pi(\,Y \mid p, c_1, \dots c_n) = pY - \mathbb{C}(c_1, \dots c_n, Y)$$

La variable endogène est : Y

Les variables exogènes sont : $c_1, \dots c_n$ et p

Il s'agit de maximiser une fonction à une seule variable Y ; la solution est donc définie par :

$$\Pi'(\,Y \mid p, c_1, \dots c_n) = p - \frac{\partial \mathbb{C}(c_1, \dots c_n, Y)}{\partial Y} = 0 \qquad i.e. \qquad p = \mathbb{C}_m(\cdot)$$

où $\mathbb{C}_m(\cdot)$ note le coût marginal de production

La résolution en Y de cette équation donne directement l'offre de la firme : $Y^* = Y^*(p, c_1, \dots c_n)$

En reportant cette dernière dans les demandes de facteurs *conditionnelles* on obtient alors les demandes de facteurs de l'entreprise : $x_i^* = \tilde{x}_i(c_1, \dots c_n, Y^*(p, c_1, \dots c_n)),\quad i = 1 \dots n$ ■

2.3. – Exemple

Cas à 2 inputs avec $F(x_1, x_2) = {x_1}^{1/4}\, {x_2}^{1/4}$ et $c_1 = c_2 = 1$

- **1ère étape**

Dans le cas de cet exemple le programme [P5] s'écrit :

$$\underset{\{x_1, x_2\}}{\text{Min}} \quad C(x_1, x_2 \mid c_1, c_2) = c_1 x_1 + c_2 x_2$$
$$s.t. \quad F(x_1,\, x_2) \geq Y$$

où le niveau de production à réaliser Y est une variable exogène lors de cette 1ère étape

Le lagrangien associé à ce problème est :

$$L(x_1,\, x_2\,, \lambda \mid c_1, c_2, Y) = \; c_1 x_1 + \; c_2 x_2 \; - \; \lambda(F(x_1,\, x_2) - Y)$$

Et les conditions du 1er ordre sont données par le système de 3 équations à 3 inconnues ($x_1,\ x_2$ et λ)

$$c_1 = \lambda F_{x_1}(\cdot) \qquad [1]$$

$$c_2 = \lambda F_{x_2}(\cdot) \qquad [2]$$

$$\lambda(F(x_1,\, x_2) - Y) = 0 \qquad [3]$$

De [1] on tire $\lambda = \frac{c_1}{F_{x_1}(\cdot)} > 0$

D'après [3] on a donc : $F(x_1,\, x_2) = Y$ [5]

En formant le rapport $\frac{[1]}{[2]}$ on obtient d'autre part : $\frac{F_{x_1}(\cdot)}{F_{x_2}(\cdot)} = \frac{c_1}{c_2}$ [6]

Comme $F(x_1, x_2) = {x_1}^{1/4}\, {x_2}^{1/4}$ et $c_1 = c_2 = 1$, [5]-[6] s'écrit :

$${x_1}^{1/4}\, {x_2}^{1/4} = Y$$

$$x_1 = x_2$$

La résolution en x_1 et x_2 de ce système de 2 équations à 2 inconnues (Y est ici exogène) donne les demandes de facteurs conditionnelles :

$$\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = Y^2$$

La fonction de coûts est alors $C(x_1, x_2 \mid c_1, c_2) = \; c_1 \tilde{x}_1 + \; c_2 \tilde{x}_2 = 2Y^2 = \mathbb{C}(Y)$ ■

- **2ème étape**

On cherche ici le niveau optimal de production. Le problème s'écrit sous la forme du programme sans contrainte [P6]:

$$\underset{\{Y\}}{\text{Max}} \;\; \Pi(Y \mid p) = pY - \mathbb{C}(Y)$$

• La variable endogène est : Y

- La seule variable exogène est p (puisque $c_1 = c_2 = 1$)

La solution est donc définie par :

$$\Pi'(Y \mid p) = p - \mathbb{C}'(Y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p = 4Y$$

La résolution en Y de cette équation donne directement l'offre de la firme : $Y^* = \frac{p}{4}$

En reportant cette dernière dans les demandes de facteurs *conditionnelles* $\tilde{x}_1$ et $\tilde{x}_2$, on obtient alors les demandes de facteurs de l'entreprise :

$$x_1^* = x_1^* = \; Y^{*2} = \frac{p^2}{16} \qquad ■$$

2.4. – La distinction court terme *vs* long terme : les facteurs fixes

Long terme : tous les facteurs sont variables *i.e.* endogènes

Court terme : il existe des facteurs fixes *i.e.* exogènes.

On décompose donc les n facteurs de production $(x_1, \dots, x_n)$ en deux types de facteurs :

$$(x_1, \dots, x_n) = \Big(\underbrace{x_1, \dots, x_k}_{\substack{\text{facteurs} \\ \text{variables} \\ \text{à LT et CT}}}, \underbrace{x_{k+1}, \dots, x_n}_{\substack{\text{facteurs} \\ \text{variables à LT} \\ \text{mais fixes à CT}}}\Big)$$

2.4.1.– Demandes conditionnelles et coût à long terme (LT)

A long terme le programme donnant les demandes conditionnelles et la fonction de coûts est [$P5_{LT}$]:

$$\underset{\{x_1,\dots,x_n\}}{\text{Min}} \quad C(x_1, \dots, x_n \mid c_1, \dots, c_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$
$$s.t. \quad F(x_1, \dots, x_n) \geq Y$$

dont les quantités de facteurs $x_1, \dots, x_n$ sont toutes des variables endogènes, tandis que les variables exogènes sont $c_1, \dots, c_n$ et Y

Les n demandes de facteurs conditionnelles à long terme issues de ce programme sont alors (*cf.* : 2.1)

$$\tilde{x}_i^{LT} = \tilde{x}_i^{LT}(c_1, \dots c_n, Y) \qquad i = 1 \dots n$$

Et la *fonction de coûts à long terme* : $\mathbb{C}^{LT}(c_1, \dots c_n, Y) = \sum_{i=1}^{n} c_i\, \tilde{x}_i^{LT}(c_1, \dots c_n, Y)$ qui dépend des variables exogènes du problème

2.4.2. – Demandes conditionnelles et coût à court terme (CT)

A court terme $x_{k+1}, \dots, x_n$ sont fixés ; le programme donnant les demandes conditionnelles et la fonction de coûts est donc [$P5_{CT}$]:

$$\underset{\{x_1,\dots,x_k\}}{\text{Min}} \quad C(x_1, \dots, x_k \mid c_1, \dots, c_n,\ x_{k+1}, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{k} c_i x_i + \sum_{i=k+1}^{n} c_i x_i$$
$$s.t. \quad F(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \geq Y$$

dont :

- les variables endogènes sont les quantités de facteurs variables à court terme : $x_1, \dots, x_k$
- les variables exogènes sont $c_1, \dots, c_n$, Y $\oplus$ les quantités de facteurs fixes à court terme : $x_{k+1}, \dots, x_n$

On remarque que le premier terme de la fonction à minimiser $(\sum_{i=1}^{k} c_i x_i)$ est un *coût variable* de production que l'on note : $C_V(x_1, \dots, x_k \mid c_1, \dots, c_k)$

Le second terme de la fonction à minimiser $(\sum_{i=k+1}^{n} c_i x_i)$ est un *coût fixe* de production que l'on note F

Comme $\sum_{i=k+1}^{n} c_i x_i = F$ est un terme constant on remarque que la solution de [P5$_{CT}$] est la même que celle de :

$$\underset{\{x_1,\dots,x_k\}}{\text{Min}} \quad C_V(x_1, \dots, x_k \mid c_1, \dots, c_k) = \sum_{i=1}^{k} c_i x_i$$
$$s.t. \quad F(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \geq Y$$

Les k demandes de facteurs conditionnelles à court terme issues de ce dernier programme, dépendant des variables exogènes intervenant dans celui-ci, s'écrivent donc sous la forme :

$$\tilde{x}_i^{CT} = \tilde{x}_i^{CT}(c_1, \dots c_k, x_{k+1}, \dots, x_n, Y) \qquad i = 1 \dots k$$

Les demandes de facteurs conditionnelles à court terme dépendent *(i)* des coûts des facteurs variables, *(ii)* des quantités des facteurs fixes à court terme et *(iii)* du niveau de production à réaliser

La *fonction de coûts de court terme* est alors :

$$\mathbb{C}^{CT}(c_1, \dots c_n, x_{k+1}, \dots, x_n, Y) = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} c_i\, \tilde{x}_i^{CT}(c_1, \dots c_k, x_{k+1}, \dots, x_n, Y)}_{\text{Coût variable}=C_V} + \underbrace{\sum_{i=k+1}^{n} c_i x_i}_{\text{Coût fixe} = F}$$

La fonction de coûts de CT, contrairement à celle de LT, comprend un coût fixe de production strictement positif: $F = \sum_{i=k+1}^{n} c_i x_i > 0$

2.4.3. – Passer du court terme (CT), au long terme (LT)

Pour déduire les demandes conditionnelles à LT à partir des demandes conditionnelles à CT, il suffit de minimiser la fonction de coûts de CT en considérant comme variables (à LT) les facteurs que l'on considérait comme fixes (à CT).

Le programme à résoudre est donc :

$$\underset{\{x_{k+1},\dots,x_n\}}{\text{Min}} \mathbb{C}^{CT}(c_1, \dots c_n, x_{k+1}, \dots, x_n, Y) = \sum_{i=1}^{k} c_i\, \tilde{x}_i^{CT}(c_1, \dots c_k,\ x_{k+1}, \dots, x_n, Y) + \sum_{i=k+1}^{n} c_i x_i$$

Dont :

- les variables endogènes sont $x_{k+1}, \dots, x_n$
- les variables exogènes sont $c_1, \dots, c_n$ et Y

Les conditions du premier ordre forment un système de *n-k* équations à *n-k* inconnues : $x_{k+1}, \dots, x_n$

$$\frac{\partial \mathbb{C}^{CT}(c_1, \dots c_n, x_{k+1}, \dots, x_n, Y)}{\partial x_i} = 0 \qquad \forall i = k+1, \dots, n$$

dont la résolution donnent les demandes de facteurs conditionnelles à LT des facteurs fixes à CT, soit :

$$\tilde{x}_i^{LT} = \tilde{x}_i^{LT}(c_1, \dots c_n, Y) \qquad i = k+1, \dots, n$$

Il suffit alors de reporter ces dernières dans les demandes de facteurs conditionnelles à CT des facteurs variables à CT, pour obtenir les demandes de facteurs conditionnelles à LT des facteurs variables à CT, soit :

$$\tilde{x}_i^{LT} = \tilde{x}_i^{CT}\left(c_1, \dots c_k, \tilde{x}_{k+1}^{LT}, \dots, \tilde{x}_n^{LT}, Y\right) = \tilde{x}_i^{LT}(c_1, \dots c_n, Y) \qquad i = 1 \dots k$$

La fonction de coût de LT est enfin obtenue en remplaçant dans la fonction de coût de CT, les facteurs fixes $(x_{k+1}, \dots, x_n)$ par leurs valeurs optimales à long terme $(\tilde{x}_{k+1}^{LT}, \dots, \tilde{x}_n^{LT})$, soit :

$$\mathbb{C}^{LT}(c_1, \dots c_n, Y) = \mathbb{C}^{CT}\left(c_1, \dots c_n, \tilde{x}_{k+1}^{LT}, \dots, \tilde{x}_n^{LT}, Y\right) \qquad \blacksquare$$

2.4.4. – L'offre à court terme (CT) *vs* l'offre à long terme (LT)

- **L'offre à LT** est obtenue en maximisant le profit défini comme la différence entre les recettes et le coût à LT (*cf.* 2.2):

$$\underset{\{Y\}}{\text{Max}} \quad \Pi(Y \mid p, c_1, \dots c_n) = pY - \mathbb{C}^{LT}(c_1, \dots c_n, Y)$$

$$\text{avec} \qquad \mathbb{C}^{LT}(c_1, \dots c_n, Y) = \sum_{i=1}^{n} c_i \, \tilde{x}_i^{LT}(c_1, \dots c_n, Y)$$

- La variable endogène est : Y
- Les variables exogènes sont : $c_1, \dots c_n$ et p

La solution est définie par :

$$\Pi'(Y \mid p, c_1, \dots c_n) = p - \frac{\partial \mathbb{C}^{LT}(c_1, \dots c_n, Y)}{\partial Y} = 0 \qquad i.e. \qquad p = \mathbb{C}_m^{LT}(c_1, \dots c_n, Y)$$

où $\mathbb{C}_m^{LT}(\cdot)$ note le coût marginal de production à LT

La résolution en Y de cette équation donne alors l'offre de la firme à LT : $Y_{LT}^* = Y_{LT}^*(p, c_1, \dots, c_n)$ $\blacksquare$

- L'offre à CT est obtenue en maximisant le profit défini comme la différence entre les recettes et le coût à CT :

$$\underset{\{Y\}}{\text{Max}} \quad \Pi(Y \mid p, c_1, \dots c_n, x_{k+1}, \dots, x_n) = pY - \mathbb{C}^{CT}(c_1, \dots c_n, x_{k+1}, \dots, x_n\, Y)$$

$$\text{où} \qquad \mathbb{C}^{CT}(c_1, \dots c_n, x_{k+1}, \dots, x_n\, Y) = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} c_i \, \tilde{x}_i^{CT}(c_1, \dots c_k, x_{k+1}, \dots, x_n, Y)}_{\text{Coût variable} = \mathbb{C}_V^{CT}} + \underbrace{\sum_{i=k+1}^{n} c_i x_i}_{\text{Coût fixe} = F}$$

Comme F est une constante le programme ci-dessus donne la même solution que le programme :

$$\underset{\{Y\}}{\text{Max}} \quad \Omega = \; pY - \underbrace{\sum_{i=1}^{k} c_i \, \tilde{x}_i^{CT}(c_1, \dots c_k, x_{k+1}, \dots, x_n, Y)}_{\text{Coût variable} = \mathbb{C}_V^{CT}(c_1, \dots c_k, x_{k+1}, \dots, x_n, Y)}$$

Dont : la variable endogène est Y

Les variables exogènes sont : $x_{k+1}, \dots, x_n, c_1, \dots c_k$ et p

La solution est définie par :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial Y} = p - \frac{\partial\, \mathbb{C}_V^{CT}(c_1, \dots c_k, x_{k+1}, \dots, x_n, Y)}{\partial Y} = 0$$

$$i.e. \quad p = \mathbb{C}_m^{CT}(c_1, \dots c_k, x_{k+1}, \dots, x_n, Y)$$

où $\mathbb{C}_m^{CT}(\cdot)$ note le coût marginal de production à CT

La résolution en Y de cette équation donne alors le niveau de production qui maximise le profit de la firme à CT : $Y_{CT}^* = Y_{CT}^*(p, x_{k+1}, \dots, x_n, c_1, \dots c_k)$

Nota : Comte tenu de l'existence à CT d'un coût fixe de production $F > 0$, correspondant au coût d'achat des facteurs fixes, il faut vérifier que le profit maximum est positif *i.e.* que les recettes sont suffisantes pour couvrir le coût variable de production augmenté du coût fixe de production F. Cela n'est vérifié que si :

$$\Pi(\, Y_{CT}^* \mid p, c_1, \dots c_n, x_{k+1}, \dots, x_n) = p\, Y_{CT}^* - \mathbb{C}^{CT}(c_1, \dots c_n, x_{k+1}, \dots, x_n, Y_{CT}^*)$$

$$= pY_{CT}^* - \sum_{i=1}^{k} c_i\, \tilde{x}_i^{CT}(x_{k+1}, \dots, x_n, c_1, \dots c_k, Y_{CT}^*) - \sum_{i=k+1}^{n} c_i x_i \geq 0$$

$$\text{où} \qquad Y_{CT}^* = Y_{CT}^*(p, x_{k+1}, \dots, x_n, c_1, \dots c_k)$$

La résolution en p de cette équation donne la condition recherchée :

$$p \geq \underline{p}(x_{k+1}, \dots, x_n, c_1, \dots c_n\,)$$

Le prix de marché doit être suffisamment fort pour permettre de couvrir les coûts fixes de production

La fonction d'offre à court terme est donc :

$$\begin{aligned} Y_{CT}^* &= Y_{CT}^*(p, x_{k+1}, \dots, x_n, c_1, \dots c_k) && \text{si} \quad p \geq \underline{p}(x_{k+1}, \dots, x_n, c_1, \dots c_n\,) \\ &= 0 && \text{si} \quad p < \underline{p}(x_{k+1}, \dots, x_n, c_1, \dots c_n\,) \end{aligned}$$

2.4.5. – Exemple

Cas à 2 inputs avec $F(x_1, x_2) = {x_1}^{1/4}\, {x_2}^{1/4}$ et $c_1 = c_2 = 1$

On suppose que :

- x_1 est variable à CT et LT
- x_2 est variable à LT mais fixe à CT

- **Long terme**

A long terme les 2 facteurs sont variables. On est donc dans la même situation qu'en 2.3. et on a :

$$\tilde{x}_1^{LT} = \tilde{x}_2^{LT} = Y^2$$

La fonction de coûts de LT est alors : $\mathbb{C}^{LT}(Y) = \tilde{x}_1^{LT} + \tilde{x}_2^{LT} = 2Y^2$

Et l'offre à LT de la firme : $Y_{LT}^{*} = \frac{p}{4}$

Le profit maximum est dans ce cas : $\Pi_{LT}^{*} = pY_{LT}^{*} - \mathbb{C}^{LT}(Y_{LT}^{*}) = \frac{p^2}{8} \geq 0$

Comme il n'y a pas de coût fixe de production à couvrir, le profit maximum est positif dès que le prix est positif, ce qui est toujours le cas par hypothèse

- **Court terme**

A court terme x_1 est variable mais x_2 est fixe *i.e.* exogène

Le programme donnant les demandes conditionnelles et la fonction de coûts est [P5$_{CT}$], soit dans notre exemple :

$$\underset{\{x_1\}}{\text{Min}} \quad C(x_1 |\, x_2) = x_1 + \underbrace{x_2}_{F}$$

$$s.t. \quad F(x_1, x_2) \geq Y$$

dont :

- la variable endogène est la quantité du facteur variable à court terme x_1
- les variables exogènes sont Y et la quantité donnée de facteur fixe à court terme x_2

La solution de ce programme est évidemment identique à celle du programme suivant :

$$\underset{\{x_1\}}{\text{Min}} \quad x_1$$

$$s.t. \quad {x_1}^{1/4}\, {x_2}^{1/4} \geq Y$$

dont la solution triviale est directement donnée par la saturation de la contrainte, soit : $\tilde{x}_1^{CT} = \frac{Y^4}{x_2}$

La fonction de coûts de CT est alors :

$$\mathbb{C}^{CT}(x_2, Y) = \tilde{x}_1^{CT} + \underbrace{x_2}_{F} = \frac{Y^4}{x_2} + x_2$$

La production optimale à court terme est définie par le programme :

$$\underset{\{Y\}}{\text{Max}} \quad \Pi(\,Y \mid p, x_2) = pY - \mathbb{C}^{CT}(x_2, Y)$$

dont la solution est donnée par l'équation : $\Pi'(Y \mid p, x_2) = p - \frac{\partial \mathbb{C}^{CT}(x_2, Y)}{\partial Y} = 0 \quad i.e. \quad p = \frac{4Y^3}{x_2}$

que l'on résout en Y pour déterminer le niveau optimal de production à CT : $Y_{CT}^{*} = \left(\frac{x_2}{4} p\right)^{1/3}$

Le profit maximum s'écrit alors :

$$\Pi_{CT}^{*} = p\, Y_{CT}^{*} - \mathbb{C}^{CT}(x_2,\, Y_{CT}^{*})$$

$$= p\,Y_{CT}^* - \frac{{Y_{CT}^*}^4}{x_2} - x_2 = \underbrace{\left(4^{-1/3} - 4^{-4/3}\right)}_{\gamma = 0.472} {x_2}^{1/3} p^{4/3} - x_2$$

Compte tenu du coût fixe de production $F = x_2 > 0$ le maximum de profit n'est positif que si :

$$\gamma {x_2}^{1/3} p^{4/3} \geq x_2 \quad i.e. \quad p \geq \gamma^{-3/4} {x_2}^{1/2}$$

La fonction d'offre à court terme est donc :

$$Y_{CT}^* = \left(\frac{x_2}{4} p\right)^{1/3} \quad \text{si} \quad p \geq \gamma^{-3/4} {x_2}^{1/2}$$

$$= 0 \quad \text{si} \quad p < \gamma^{-3/4} {x_2}^{1/2}$$

- **Le passage du court terme au long terme**

A court terme on a vu que la demande conditionnelle de x_1 est : $\tilde{x}_1^{CT}(x_2, Y) = \frac{Y^4}{x_2}$

Engendrant la fonction de coûts de CT:

$$\mathbb{C}^{CT}(x_2, Y) = \frac{Y^4}{x_2} + x_2$$

Pour déduire les demandes de facteurs conditionnelles à LT, il suffit de minimiser la fonction de coûts de CT par rapport au facteur fixe à court terme x_2. Le programme à résoudre est ici :

$$\underset{\{x_2\}}{\text{Min}} \quad \mathbb{C}^{CT}(x_2, Y) = \frac{Y^4}{x_2} + x_2$$

Dont la solution est donnée par :

$$\frac{\partial \mathbb{C}^{CT}(x_2, Y)}{\partial x_2} = 1 - \frac{Y^4}{{x_2}^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{x}_2^{LT} = Y^2$$

En reportant alors cette expression dans la demande conditionnelles de x_1 à CT, on obtient la demande conditionnelle de x_1 à LT:

$$\tilde{x}_1^{LT} = \tilde{x}_1^{CT}(\tilde{x}_2^{LT}, Y) = \frac{Y^4}{\tilde{x}_2^{LT}} = Y^2$$

Dont on déduit enfin la fonction de coût à LT :

$$\mathbb{C}^{LT}(Y) = \tilde{x}_1^{LT} + \tilde{x}_2^{LT} = 2Y^2 \quad \blacksquare$$

3ème partie - Conditions du 2nd ordre

Jusqu'à présent on ne s'est intéressé qu'aux conditions du premier ordre, en supposant *de facto* les conditions du 2nd ordre satisfaites

L'objet de cette partie est d'étudier plus en détail les conditions du 2nd ordre et leur rôle dans les programmes d'optimisation. On se limite toutefois aux cas de minimum ou de maximum global.

Pour davantage de développements et plus de généralité le lecteur pourra utilement se reporter à :

- Julien Grenet [2007], *Vade mecum : Optimisation statique - Lagrangien et conditions de Kuhn et Tucker* (www.parisschoolofeconomics.com/grenet-julien/TD/Annexe1.pdf)
- Marianne Tenand [2005], *Optimisation statique : ce qu'il faut retenir* (http://www.parisschoolofeconomics.eu/docs/tenand-marianne/optimisation-statique(1).pdf)

1. – Optimisation sans contrainte

1.1. – Fonction à une variable

Supposons que l'on cherche à maximiser une fonction simple à une variable notée $\mathcal{F}(x)$:

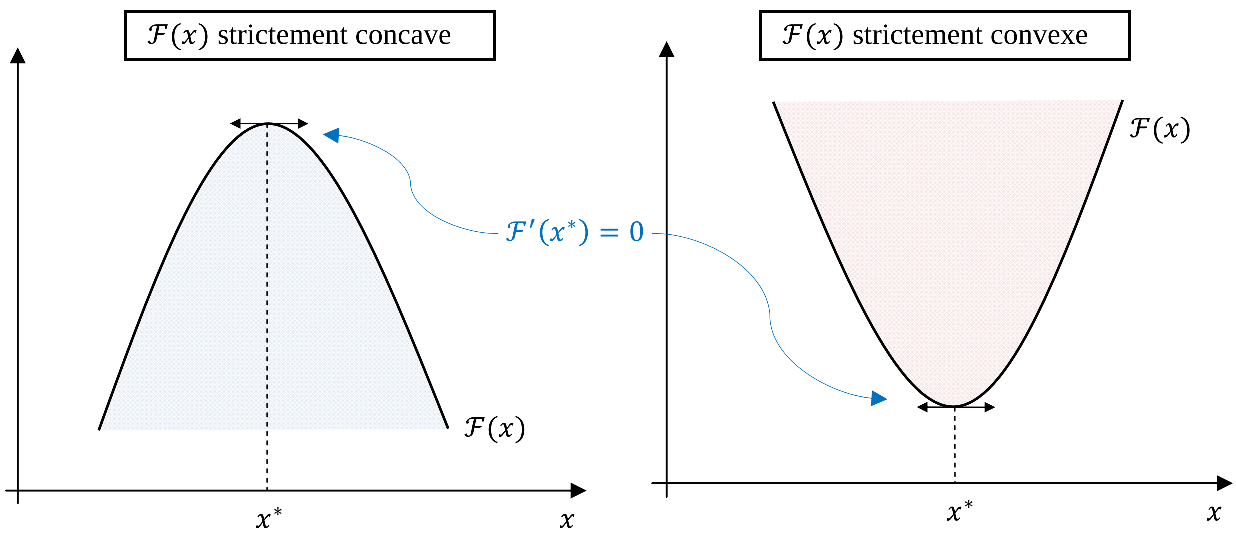
$$\underset{\{x\}}{\text{Max}} \quad \mathcal{F}(x)$$

Pour que la fonction atteigne un maximum en un point x^* il faut que sa dérivée soit nulle en ce point :

$$\mathcal{F}'(x^*) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^* = \mathcal{F}'^{-1}(0)$$

C'est ce qu'on appelle la condition du 1er ordre

Les graphiques ci-dessous montrent cependant que la condition $\mathcal{F}'(x^*) = 0$ caractérise, selon la nature de $\mathcal{F}(x)$, aussi bien un *maximum* …qu'un *minimum* (parfois même un point d'inflexion):



Pour notre problème, $\text{Max}_{\{x\}}\ \mathcal{F}(x)$:

- La condition du 1er ordre $\mathcal{F}'(x^*) = 0$ est bien une condition nécessaire : on ne peut pas être à un maximum si la dérivée (*i.e.* la pente de la fonction) n'est pas nulle

- Mais ce n'est pas une condition <u>suffisante</u> car on peut avoir une dérivée nulle et ne pas être à un maximum (dans le graphique de droite on est, au contraire, à un minimum)

Si on veut être certain d'être à un maximum il faut être dans le cas du graphique de gauche ; $\mathcal{F}(x)$ doit donc être strictement concave, soit : $\mathcal{F}"(x) < 0$ (condition du 2nd ordre)

- Pour qu'une fonction $\mathcal{F}(x)$ atteigne un *maximum* en x^*, on doit donc avoir à la fois : $\mathcal{F}'(x^*) = 0$ (condition du 1er ordre) et $\mathcal{F}"(x) < 0$ (condition du 2nd ordre)

- Inversement, pour qu'une fonction $\mathcal{F}(x)$ atteigne un *minimum* en x^* (graphique de droite) on doit avoir à la fois : $\mathcal{F}'(x^*) = 0$ (condition du 1er ordre) et $\mathcal{F}(x)$ strictement convexe *i.e.* $\mathcal{F}"(x) > 0$ (condition du 2nd ordre)

1.2. – Fonction à plusieurs variables

Considérons maintenant que l'on cherche à maximiser ou minimiser une fonction $\mathcal{F}$ à *n* variables :

$$\underset{\{x_1,\dots,x_n\}}{\text{Max } ou \text{ Min}} \quad \mathcal{F}(x_1, \dots x_n)$$

Les *n* conditions du 1er ordre associées sont définies par :

$$\nabla\mathcal{F} = 0 \qquad i.e. \qquad \partial\mathcal{F}/\partial x_i = 0 \quad \forall i = 1 \dots n$$

dont la résolution donne $(x_1^*, \dots, x_n^*)$ qui est on l'a vu :

- un maximum si $\mathcal{F}$ est strictement concave
- un minimum si $\mathcal{F}$ est strictement convexe

Il faut donc étudier les conditions sous lesquelles la fonction $\mathcal{F}$ à *n* variables est concave *vs* convexe

On introduit pour cela la définition préalable suivante (*cf.* Annexe A4.) :

Mineurs principaux diagonaux d'une matrice : Soit M une matrice carré symétrique de dimension (n, n). Le mineur principal diagonal d'ordre k (noté D_k) de la matrice M est le déterminant de la matrice de taille (k, k) obtenue en ne conservant que les k premières lignes et k premières colonnes de la matrice M

Les conditions de convexité et de concavité sont alors les suivantes (*cf.* Annexe A4.) :

- $\mathcal{F}$ est convexe ssi la matrice Hessienne de $\mathcal{F}$, notée $\mathcal{H}(\mathcal{F})$, est semi-définie positive *i.e.* si les mineurs principaux diagonaux de $\mathcal{H}(\mathcal{F})$ sont tous positifs (≥ 0)
- $\mathcal{F}$ est strictement convexe si $\mathcal{H}(\mathcal{F})$ est définie positive *i.e.* si les mineurs principaux diagonaux de $\mathcal{H}(\mathcal{F})$ sont tous strictement positifs (> 0)
- $\mathcal{F}$ est concave ssi $\mathcal{H}(\mathcal{F})$ est semi-définie négative *i.e.* si les mineurs principaux diagonaux de $\mathcal{H}(\mathcal{F})$ sont de signes alternés, au sens large, le premier étant négatif : $\leq 0, \geq 0, \leq 0$ *etc.*
- $\mathcal{F}$ est strictement concave si $\mathcal{H}(\mathcal{F})$ est définie négative *i.e.* si les mineurs principaux diagonaux de $\mathcal{H}(\mathcal{F})$ sont de signes alternés, au sens strict, le premier étant négatif : $< 0, > 0, < 0$ *etc.*

Exemple

Soit une fonction à 3 variables notée $\mathcal{F}(x_1, x_2, x_3)$. La matrice Hessienne de $\mathcal{F}$ est (*cf.* annexe A3.) :

$$\mathcal{H}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} F_{x_1x_1} & F_{x_1x_2} & F_{x_1x_3} \\ F_{x_2x_1} & F_{x_2x_2} & F_{x_2x_3} \\ F_{x_3x_1} & F_{x_3x_2} & F_{x_3x_3} \end{pmatrix}$$

On a alors : $D_1 = |F_{x_1x_1}| = F_{x_1x_1}$

$$D_2 = \begin{vmatrix} F_{x_1x_1} & F_{x_1x_2} \\ F_{x_2x_1} & F_{x_2x_2} \end{vmatrix} = F_{x_1x_1}F_{x_2x_2} - F_{x_2x_1}F_{x_1x_2}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} F_{x_1x_1} & F_{x_1x_2} & F_{x_1x_3} \\ F_{x_2x_1} & F_{x_2x_2} & F_{x_2x_3} \\ F_{x_3x_1} & F_{x_3x_2} & F_{x_3x_3} \end{vmatrix} = F_{x_1x_1}F_{x_2x_2}F_{x_3x_3} + F_{x_1x_2}F_{x_2x_3}F_{x_3x_1} + F_{x_1x_3}F_{x_2x_1}F_{x_3x_2}$$
$$-F_{x_3x_1}F_{x_2x_2}F_{x_1x_3} - F_{x_3x_2}F_{x_2x_3}F_{x_1x_1} - F_{x_3x_3}F_{x_2x_1}F_{x_1x_2}$$

Et finalement les conditions de concavité et de convexité :

- $\mathcal{F}$ convexe $\Leftrightarrow$ $D_1 \geq 0, D_2 \geq 0, D_3 \geq 0$
- $\mathcal{F}$ strictement convexe $\Leftarrow$ $D_1 > 0, D_2 > 0, D_3 > 0$
- $\mathcal{F}$ concave $\Leftrightarrow$ $D_1 \leq 0, D_2 \geq 0, D_3 \leq 0$
- $\mathcal{F}$ strictement concave $\Leftarrow$ $D_1 < 0, D_2 > 0, D_3 < 0$

1.3. – Utilisation en microéconomie

1.3.1. – Conditions du 2nd ordre du problème du consommateur

Dans le cas le plus simple (*i.e.* avec des biens nécessaires et en l'absence de contrainte quantitatives de disponibilité), le programme du consommateur s'écrit :

$$\underset{\{x_1,\dots,x_n\}}{\text{Max}} \quad U(x_1, \dots, x_n)$$
$$s.t. \quad \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq R$$

La résolution de ce programme donne : $x_i^* = x_i^*(p_1, \dots p_n, R), \quad i = 1 \dots n$

$X^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ est l'optimum unique du consommateur si les *préférences sont strictement convexes i.e.* si les courbes d'indifférence associées à $U(x_1, \dots, x_n)$ sont strictement convexes

Une courbe d'indifférence de niveau U_0 quelconque étant définie par $U(x_1, \dots, x_n) = U_0$, il suffit de résoudre cette équation (par exemple) en x_1 pour obtenir l'équation explicite de la courbe d'indifférence :

$$x_1 = \varphi(x_2, \dots, x_n)$$

Les préférences sont alors strictement convexes si φ est strictement convexe *i.e.* si $\mathcal{H}(\varphi)$ est définie positive (mineurs principaux diagonaux de $\mathcal{H}(\varphi)$ tous > 0)

Définition : Une fonction d'utilité $U(x_1, \dots, x_n)$ dont les courbes d'indifférence sont strictement convexes est dite strictement quasi-concave

Au lieu de vérifier la stricte convexité de la courbe d'indifférence φ associée à la fonction d'utilité U on peut donc, de façon équivalente, directement vérifier si U est strictement quasi-concave

Les conditions portent dans ce cas sur la *matrice Hessienne bordée* notée $\overline{\mathcal{H}}(U)$ (*cf.* annexe A3.) :

U est strictement quasi-concave si les mineurs principaux diagonaux D_k de $\overline{\mathcal{H}}(U)$, pris à partir de $k = 2$ sont de signes alternés, au sens strict, le premier étant négatif : $D_2 < 0,\ D_3 > 0,\ D_4 < 0\ \ etc.$

Exemple n°1

On considère la fonction d'utilité $U(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2^2 x_3$

Cette fonction correspond-elle à des préférences strictement convexes ?

Pour le vérifier on remarque d'abord qu'une courbe d'indifférence est définie par :

$$x_1 x_2^2 x_3 = U_0$$

L'équation d'une courbe d'indifférence associée à $U(\cdot)$ est donc :

$$x_1 = U_0 x_2^{-2} x_3^{-1} = \varphi(x_2, x_3)$$

Il suffit alors de vérifier que $\varphi(x_2, x_3)$ est strictement convexe *i.e.* que la matrice Hessienne de φ, $\mathcal{H}(\varphi)$, est définie positive

Comme par définition $\mathcal{H}(\varphi) = \begin{pmatrix} \varphi_{x_2x_2} & \varphi_{x_2x_3} \\ \varphi_{x_3x_2} & \varphi_{x_3x_3} \end{pmatrix}$, les conditions sur les mineurs principaux diagonaux de $\mathcal{H}(\varphi)$ s'écrivent simplement :

$$D_1 = \varphi_{x_2x_2} > 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \varphi_{x_2x_2} & \varphi_{x_2x_3} \\ \varphi_{x_3x_2} & \varphi_{x_3x_3} \end{vmatrix} = \varphi_{x_2x_2}\varphi_{x_3x_3} - \varphi_{x_3x_2}\varphi_{x_2x_3} > 0$$

Soit dans l'exemple :

$$D_1 = 6U_0 x_2^{-4} x_3^{-1} > 0$$

$$D_2 = 12{U_0}^2 x_2^{-6} x_3^{-4} - 4{U_0}^2 x_2^{-6} x_3^{-4} = 8{U_0}^2 x_2^{-6} x_3^{-4} > 0$$

Comme ces deux conditions sont vérifiées $\forall x_2 > 0$ et $\forall x_3 > 0$, $\mathcal{H}(\varphi)$, est définie positive et les préférences sont strictement convexes ■

Exemple n°2

On considère la fonction d'utilité $U(x_1, x_2) = x_1 x_2$

Cette fonction correspond-elle à des préférences strictement convexes ?

Pour le vérifier on remarque d'abord qu'une courbe d'indifférence est définie par : $x_1 x_2 = U_0$

L'équation d'une courbe d'indifférence associée à $U(\cdot)$ est donc : $x_1 = U_0 x_2^{-1} = \varphi(x_2)$

Pour que les préférences soient strictement convexes, il suffit donc de s'assurer que $\varphi(x_2)$ est strictement convexe. Comme il s'agit d'une fonction à une seule variable, la condition du 2$^{\text{nd}}$ ordre est simplement $\varphi''(x_2) > 0$ qui est vérifiée $\forall x_2 > 0$ puisqu'on a ici : $\varphi''(x_2) = 2U_0 x_2^{-3}$ ■

Nota : Il est possible, au lieu de vérifier la stricte convexité de la courbe d'indifférence, de directement vérifier que la fonction d'utilité $U(x_1, x_2)$ est strictement quasi-concave.

Pour cela il faut que les mineurs principaux diagonaux D_k de la Hessienne bordée $\bar{\mathcal{H}}(U)$, pris à partir de $k = 2$, soient de signes alternés, au sens strict, le premier étant négatif : $D_2 < 0, D_3 > 0, D_4 < 0 \; etc.$

Dans notre exemple on a :

$$\bar{\mathcal{H}}(U) = \begin{pmatrix} 0 & \nabla U \\ \nabla U & \mathcal{H}(U) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & U_{x_1} & U_{x_2} \\ U_{x_1} & U_{x_1 x_1} & U_{x_1 x_2} \\ U_{x_2} & U_{x_2 x_1} & U_{x_2 x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 0 & 1 \\ x_1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les conditions sont donc : $D_2 = -x_2^2 < 0$ et $D_3 = 2x_1 x_2 > 0$ qui sont vérifiées $\forall x_1 > 0$ et $x_2 > 0$. $U(x_1, x_2)$ est bien strictement quasi-concave ■

1.3.2. – Conditions du 2$^{\text{nd}}$ ordre du problème du producteur

Dans le cas le plus simple (absence de contraintes quantitatives d'approvisionnement ou de débouchés), le programme du producteur s'écrit :

$$\underset{\{Y, x_1, \dots, x_n\}}{\text{Max}} \quad \Pi(Y, x_1, \dots, x_n \mid p, c_1, \dots, c_n) = pY - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$
$$s.t. \quad Y \leq F(x_1, \dots, x_n)$$

Comme la contrainte technologique est nécessairement saturée à l'optimum la solution de ce programme est obtenue en maximisant simplement la fonction :

$$\pi(x_1, \dots, x_n) = pF(x_1, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

La résolution de ce programme donne les demandes de facteurs de la firme :

$$x_i^* = x_i^*(p, c_1, \dots, c_n) \quad i = 1, \dots, n$$

Et en reportant celles-ci dans la contrainte technologique saturée on obtient finalement l'offre de l'entreprise : $Y^* = F(x_1^*, \dots, x_n^*)$

(Y^*, X^*) est l'optimum unique du producteur ssi la fonction que l'on maximise, $\pi(x_1, \dots, x_n)$, est strictement concave (condition du 2$^{\text{nd}}$ ordre du programme de la firme) *i.e.* si la matrice Hessienne $\mathcal{H}(\pi)$ est définie négative (mineurs principaux diagonaux de $\mathcal{H}(\pi)$ de signes alternés, au sens strict, le premier étant négatif)

Exemple

On considère la fonction de production $F(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$ avec $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ pour que les productivités marginales des facteurs soient strictement positives ($F_{x_1}(\cdot) > 0$ et $F_{x_2}(\cdot) > 0$)

Dans ce cas la fonction π s'écrit :

$$\pi(x_1, x_2) = pF(x_1, x_2) - c_1 x_1 - c_2 x_2$$

Pour être assuré d'avoir un maximum global, la condition du second ordre impose que π soit strictement concave

Comme par définition $\mathcal{H}(\pi) = \begin{pmatrix} \pi_{x_1x_1} & \pi_{x_1x_2} \\ \pi_{x_2x_1} & \pi_{x_2x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pF_{x_1x_1} & pF_{x_1x_2} \\ pF_{x_2x_1} & pF_{x_2x_2} \end{pmatrix}$ les conditions sur les mineurs principaux diagonaux de $\mathcal{H}(\pi)$ s'écrivent simplement :

$$D_1 = pF_{x_1x_1} < 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} pF_{x_1x_1} & pF_{x_1x_2} \\ pF_{x_2x_1} & pF_{x_2x_2} \end{vmatrix} = p^2 F_{x_1x_1} F_{x_2x_2} - p^2 F_{x_2x_1} F_{x_1x_2} > 0$$

Soit dans l'exemple :

$$D_1 = p\alpha(\alpha - 1) x_1^{\alpha-2} x_2^{\beta} < 0$$

$$D_2 = p^2 \alpha\beta(\alpha - 1)(\beta - 1) x_1^{2\alpha-2} x_2^{2\beta-2} - p^2 \alpha^2 \beta^2 x_1^{2\alpha-2} x_2^{2\beta-2} > 0$$

- La première condition est vérifiée ssi : $\alpha < 1$
- En réarrangeant la seconde et en simplifiant, on voit qu'elle est vérifiée ssi : $\alpha + \beta < 1$

Comme dans notre cas $\alpha > 0$, ces deux conditions se résument en une seule condition qui s'écrit :

$$\alpha + \beta < 1 \quad \blacksquare$$

Nota : On remarque que la Hessienne de π est, au terme p près, identique à la Hessienne de F :

$$\mathcal{H}(\pi) = \begin{pmatrix} \pi_{x_1x_1} & \pi_{x_1x_2} \\ \pi_{x_2x_1} & \pi_{x_2x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pF_{x_1x_1} & pF_{x_1x_2} \\ pF_{x_2x_1} & pF_{x_2x_2} \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} F_{x_1x_1} & F_{x_1x_2} \\ F_{x_2x_1} & F_{x_2x_2} \end{pmatrix} = p\mathcal{H}(F)$$

Il s'ensuit que la stricte concavité de π est équivalente à la stricte concavité de F *i.e.* à des rendements d'échelle strictement décroissants

Dans notre cas $F(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$ étant une fonction homogène de degré $\alpha + \beta$, les rendements sont strictement décroissants ssi $\alpha + \beta < 1$: on retrouve la condition qui assure la concavité stricte de π

Annexe : notations utilisées

A1. – Ecriture des formes fonctionnelles

Une fonction $Y = aX + bZ + d$ est généralement notée $Y = F(X, Z)$. Avec cette notation seules les variables X et Z apparaissent comme argument de la fonction et les paramètres a, b et c ne sont pas indiqués

Dans ce document on adopte une notation qui permet d'indiquer les paramètres. La fonction $Y = aX + bZ + d$ est ainsi notée $Y = F(X, Z \mid a, b, d)$ où les termes figurant à gauche du séparateur vertical désignent les variables et ceux figurant à droite en grisés désignent les paramètres (*i.e.* des variables dont la valeur est fixée)

Par exemple le profit d'une firme $\Pi = pY - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ sera noté, si tous les facteurs sont variables :

$$\Pi(Y, x_1, \dots, x_n \mid p, c_1, \dots, c_n)$$

pour bien montrer que les variables sont les quantités de facteurs $x_1, \dots, x_n$ et le niveau de production Y, tandis que les prix des facteurs $c_1, \dots, c_n$ et le prix de vente p – même si ils ont une influence sur le profit – sont fixés par le marché *i.e* exogènes (ce sont des données que la firme ne peut pas modifier)

Si, pour une raison ou une autre, la quantité du facteur *n* est fixe, le profit est noté différemment, soit :

$$\Pi(Y, x_1, \dots, x_{n-1} \mid p, c_1, \dots, c_n, x_n)$$

La quantité x_n du facteur *n*, bascule simplement du côté des paramètres *i.e.* des variables fixes que la firme ne peut pas modifier

A2. – Notation abrégée

Par être concis on note parfois $F(\cdot)$ à la place de $F(x_1, \dots, x_n)$.

De même on peut écrire $\frac{\partial F(\cdot)}{\partial x_1}$ à la place de $\frac{\partial F(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_1}$

Le point entre les parenthèses désigne de façon générale « tous les arguments de la fonction »

A3. – Dérivées

Soit une fonction $F(x_1, \dots, x_n)$. On utilise de façon équivalente les deux notations suivantes pour désigner la dérivée partielle de la fonction F par rapport à son i^{ème} argument :

$$F_{x_i}(x_1, \dots, x_n) \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial F(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i}$$

Les dérivées secondes par rapport aux arguments *i* et *j* sont notées :

$$F_{x_i x_j}(x_1, \dots, x_n) \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial^2 F(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i \partial x_j}$$

Le vecteur des dérivées partielles, ou gradient de F, est noté :

$$\nabla F = \left(F_{x_1}, \dots, F_{x_n}\right)$$

La matrice des dérivées secondes partielles, ou matrice Hessienne de F, s'écrit :

$$\mathcal{H}(F) = \begin{pmatrix} F_{x_1x_1} & F_{x_1x_2} & \cdots & F_{x_1x_n} \\ F_{x_2x_1} & F_{x_2x_2} & \cdots & F_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{x_nx_1} & F_{x_nx_2} & \cdots & F_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$

Nota : comme on a toujours $F_{x_ix_j} = F_{x_jx_i} \quad \forall i, \forall j$, la matrice Hessienne est symétrique

La matrice Hessienne de F bordée par le gradient – dite matrice Hessienne bordée – s'écrit enfin :

$$\bar{\mathcal{H}}(F) = \begin{pmatrix} 0 & \nabla F \\ \nabla F & \mathcal{H}(F) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & F_{x_1} & F_{x_2} & \cdots & F_{x_n} \\ F_{x_1} & F_{x_1x_1} & F_{x_1x_2} & \cdots & F_{x_1x_n} \\ F_{x_2} & F_{x_2x_1} & F_{x_2x_2} & \cdots & F_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{x_n} & F_{x_nx_1} & F_{x_nx_2} & \cdots & F_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$

A4. – Concavité, convexité, quasi-concavité et quasi-convexité

Définition préalable : Soit M une matrice carré symétrique de dimension (n, n). Le mineur principal diagonal d'ordre k (noté D_k) de la matrice M est le déterminant de la matrice de taille (k, k) obtenue en ne conservant que les k premières lignes et k premières colonnes de la matrice M :

$$\mathrm{M}(n,n) = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix} \Longrightarrow \quad D_1 = m_{11} \text{ et } D_k = \begin{vmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{k1} & \cdots & m_{kk} \end{vmatrix} \quad \forall k, 2 \leq k \leq n$$

Soit une fonction $F(x_1, \dots, x_n)$ à n variables :

- Les conditions de convexité et de concavité sont les suivantes :
  - $\mathcal{F}(x_1, \dots x_n)$ est convexe *ssi* la matrice Hessienne de $\mathcal{F}$, notée $\mathcal{H}(\mathcal{F})$, est semi-définie positive *i.e.* si les mineurs principaux diagonaux D_k de $\mathcal{H}(\mathcal{F})$ sont tous positifs : $D_1 \geq 0, D_2 \geq 0, D_3 \geq 0\ etc.$
  - $\mathcal{F}(x_1, \dots x_n)$ est strictement convexe si $\mathcal{H}(\mathcal{F})$ est définie positive *i.e.* si les mineurs principaux diagonaux D_k de $\mathcal{H}(\mathcal{F})$ sont tous strictement positifs : $D_1 > 0, D_2 > 0, D_3 > 0\ etc.$
  - $\mathcal{F}(x_1, \dots x_n)$ est concave *ssi* $\mathcal{H}(\mathcal{F})$ est semi-définie négative *i.e.* si les mineurs principaux diagonaux D_k de $\mathcal{H}(\mathcal{F})$ sont de signes alternés, au sens large, le premier étant négatif : $D_1 \leq 0, D_2 \geq 0, D_3 \leq 0\ etc.$
  - $\mathcal{F}(x_1, \dots x_n)$ est strictement concave si $\mathcal{H}(\mathcal{F})$ est définie négative *i.e.* si les mineurs principaux diagonaux D_k de $\mathcal{H}(\mathcal{F})$ sont de signes alternés, au sens strict, le premier étant négatif : $D_1 < 0, D_2 > 0, D_3 < 0\ etc.$

- Les conditions de quasi-convexité et de quasi-concavité sont les suivantes :

  - $\mathcal{F}(x_1, \dots x_n)$ est quasi-concave, et aussi strictement quasi-concave, si les mineurs principaux diagonaux D_k de $\overline{\mathcal{H}}(\mathcal{F})$, pris à partir de $k = 2$, sont de signes alternés, au sens large, le premier étant négatif : $D_2 < 0, D_3 > 0, D_4 > 0\ etc$.
  - $\mathcal{F}(x_1, \dots x_n)$ est quasi-convexe *ssi* $-\mathcal{F}(x_1, \dots x_n)$ est quasi-concave *i.e.* si les mineurs principaux diagonaux D_k de $\overline{\mathcal{H}}(\mathcal{F})$, pris à partir de $k = 2$, sont tous négatifs : $D_2 < 0, D_3 < 0, D_4 < 0\ etc$.
  - $\mathcal{F}(x_1, \dots x_n)$ est strictement quasi-convexe *ssi* $-\mathcal{F}(x_1, \dots x_n)$ est strictement quasi-concave

Chapitre 1. – L'équilibre en concurrence parfaite

1. – Offres et demande agrégées

1.1. – Demande sur un marché

k consommateurs indicés par $j = 1 \dots k$

n biens indicés par $i = 1 \dots n$

Chaque consommateur j résout le programme :

$$\underset{\{x_{j1},\dots,x_{jn}\}}{\text{Max}} \quad U(x_{j1},\dots,x_{jn})$$
$$s.t. \quad \sum_{i=1}^{n} p_i x_{ji} \leq R_j$$

Qui détermine ses demandes pour chaque bien $i = 1 \dots n$:

$$X_j^d = \left(x_{j1}^d,\dots,x_{jn}^d\right) = X_j^d\left(P,R_j\right) \qquad j = 1 \dots k$$

En agrégeant - pour chaque bien - sur l'ensemble des consommateurs, on obtient la demande de bien sur chaque marché :

$$X_i^d = \sum_{j=1}^{k} x_{ji}^d\left(P,R_j\right) = X_i^d(p_i,p_{-i},R_1,\dots,R_k) \qquad i = 1 \dots n$$

avec dans le cas général :

$$\frac{\partial X_i^d}{\partial p_i} < 0, \qquad \frac{\partial X_i^d}{\partial R_j} > 0 \quad \forall j = 1 \dots k$$

On notera par la suite $D(p)$ avec $D'(p) < 0$ la fonction de demande sur un marché

1.2. – Offre sur un marché

1.2.1. – Principes généraux

N firmes indicées par $f = 1 \dots N$ produisant un seul bien noté Y

Chaque firme - caractérisée par une fonction de coût $\mathbb{C}_f\left(Y_f\right)$ strictement croissante et convexe – résout le programme :

$$\underset{\{Y_f\}}{\text{Max}} \ \Pi_f\left(Y_f \,\middle|\, p\right) = pY_f - \mathbb{C}_f\left(Y_f\right)$$

La résolution de ce programme donne l'offre $Y_f^s(p)$ de chaque firme au prix p

On a bien sûr $\frac{\partial Y_f^s}{\partial p} > 0 \quad \forall \ f = 1 \dots N$

En agrégeant sur l'ensemble des firmes on obtient l'offre de bien sur le marché :

$$Y^s = \sum_{f=1}^{N} Y_f^s(p) = Y^s(p) \quad \text{avec} \quad \frac{\partial Y^s}{\partial p} > 0$$

1.2.2. – Coûts de production

La fonction de coût est notée $\mathbb{C}(Y) = C_V(Y) + F$

- Coût variable de production : $C_V(Y)$ avec $C_V'(Y) > 0,\ C_V''(Y) > 0$
- Coût fixe de production : $F > 0$

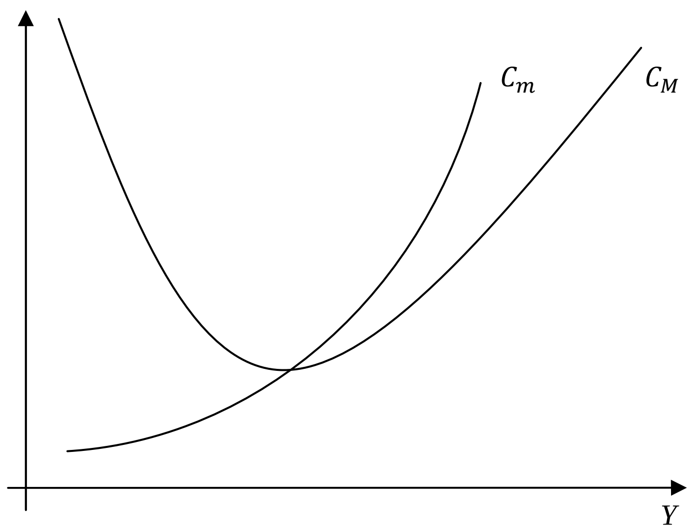
• Le coût marginal est : $C_m(Y) = \mathbb{C}'(Y) = C_V'(Y)$

On a donc : $\frac{\partial C_m}{\partial Y} = C_V''(Y) > 0$. Le coût marginal est croissant en Y

• Le coût moyen est : $C_M(Y) = \frac{\mathbb{C}(Y)}{Y} = \frac{C_V(Y)}{Y} + \frac{F}{Y}$

On a donc : $\frac{\partial C_M}{\partial Y} = \frac{\mathbb{C}'(Y)Y - \mathbb{C}(Y)}{Y^2}$ > 0 pour des valeurs élevées de Y et <0 pour des valeurs faibles

Le coût moyen atteint un minimum quand $\frac{\partial C_M}{\partial Y} = 0$ *i.e.* $\mathbb{C}'(Y) = \frac{\mathbb{C}(Y)}{Y} \Leftrightarrow C_m(Y) = C_M(Y)$



1.2.3. – Comportement d'une firme

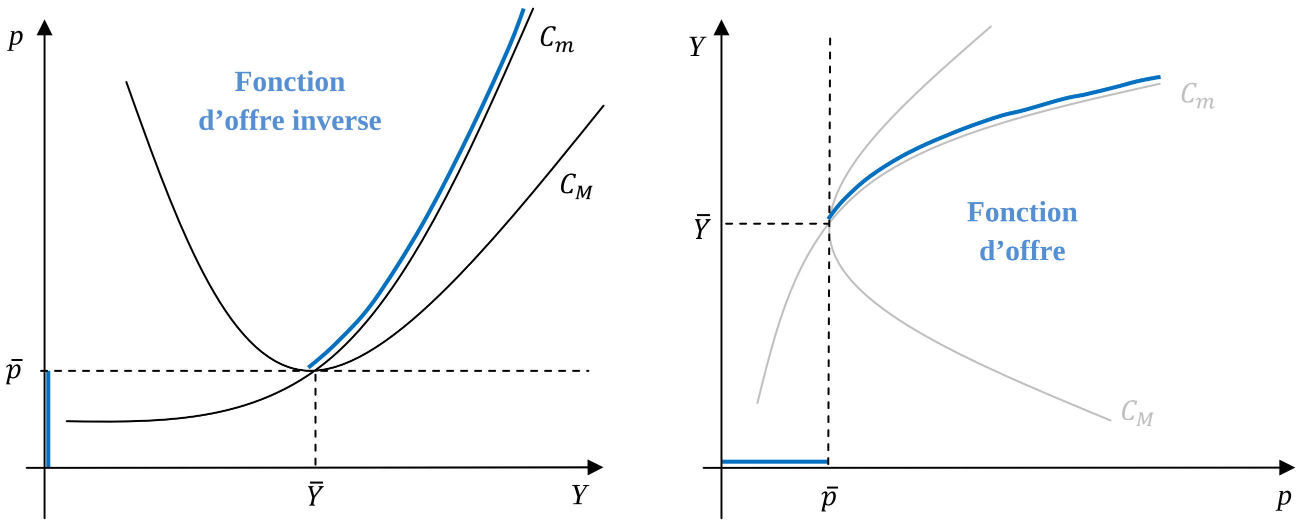
Chaque firme résout le programme :

$$\underset{\{Y\}}{\text{Max}}\ \ \Pi(Y\,|\,p) = pY - \mathbb{C}(Y)$$

L'optimum du producteur est alors défini par :

$$\Pi'(Y\,|\,p) = p - \mathbb{C}'(Y) = 0 \quad \text{i.e.} \quad C_m(Y\,) = p$$

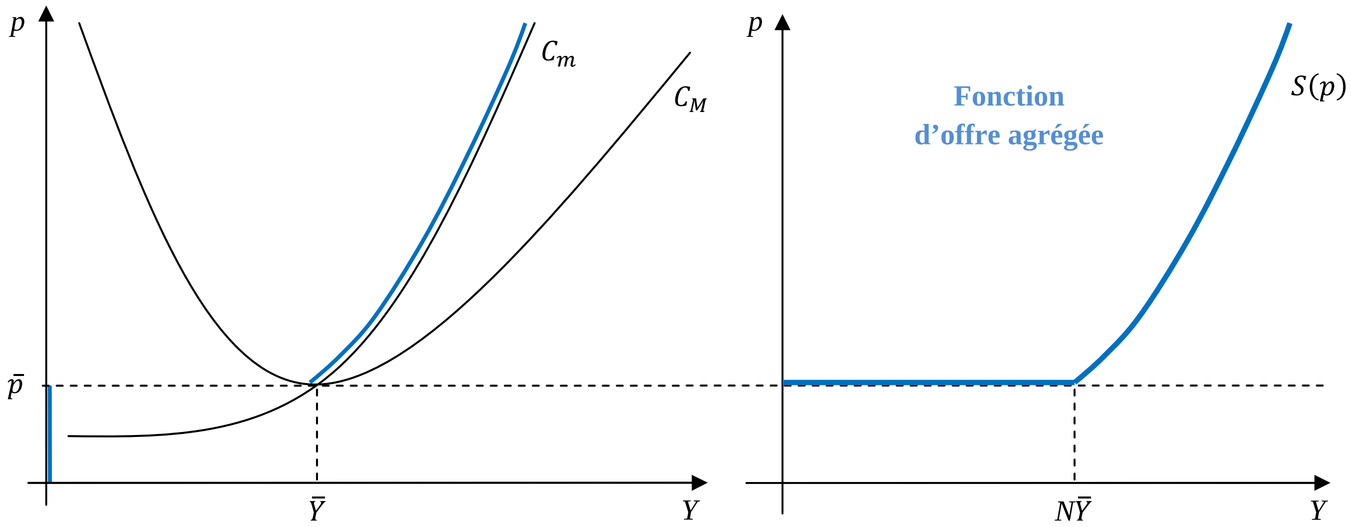
Et la condition de positivité du profit maximal impose que la firme couvre ses coûts fixes ce qui n'est le cas que si le prix de vente est supérieur au coût moyen de production



Le prix $\bar{p}$ est le seuil de rentabilité de la firme. A ce prix elle peut décider de produire $\bar{Y}$ ou de ne rien produire ; dans les deux cas son profit est nul

1.2.4. – Firmes identiques

Pour déduire l'offre globale on suppose simplement qu'il y a N firmes identiques sur le marché et on en déduit l'offre agrégée que l'on note $S(p)$

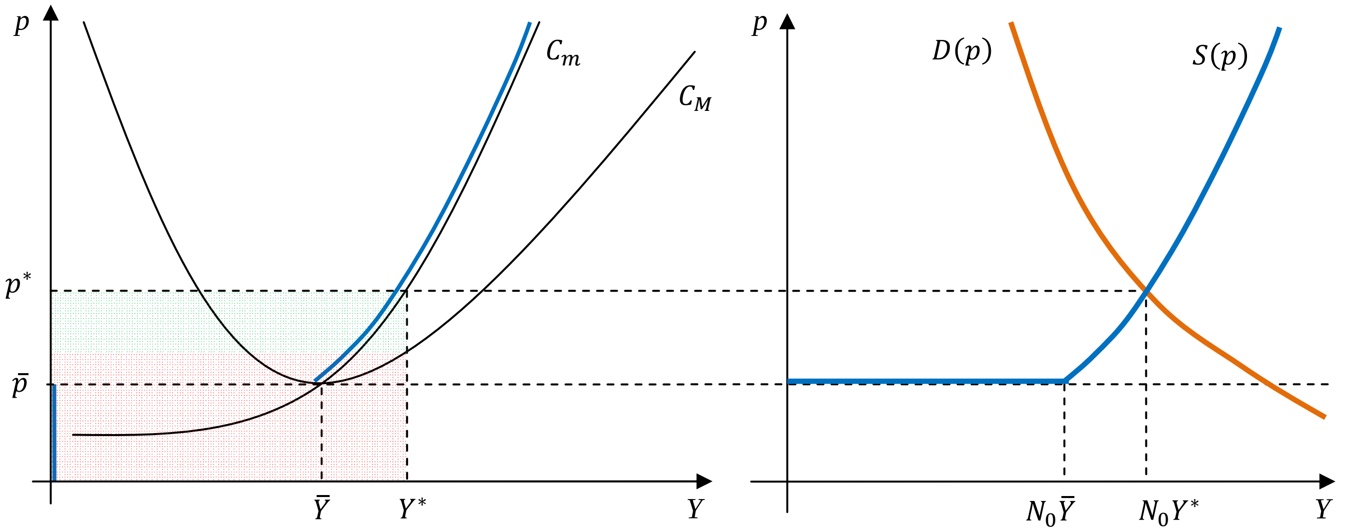


2. – Equilibre

2.1. – Equilibre avec libre entrée

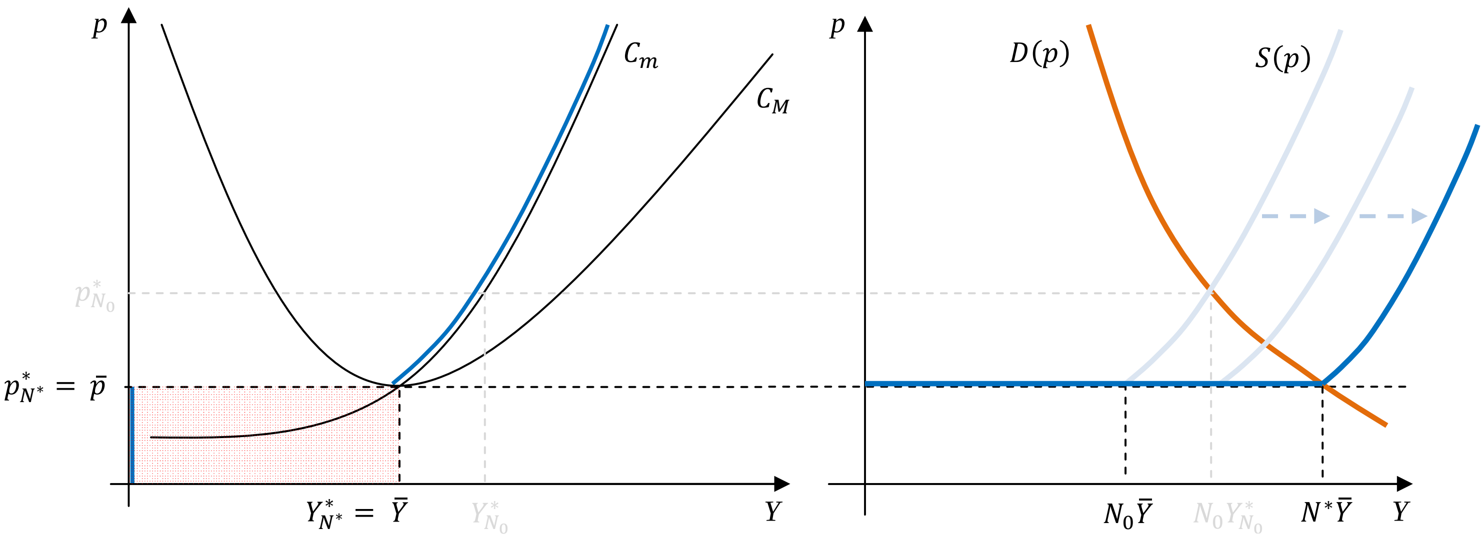
2.1.1.– Principes

Pour un nombre N_0 fixe de firmes sur le marché l'équilibre est représenté par le schéma ci-dessous :



Dans le cas ci-dessus, chaque firme réalise un profit positif à l'équilibre représenté par le rectangle vert, tandis que les coûts de production sont figurés par le rectangle rouge (le chiffre d'affaire étant la somme des deux rectangles)

En longue période, les opportunités de profit positif attirent alors de nouvelles firmes sur le marché (libre entrée) et ce jusqu'à ce qu'il y ait N^* firmes sur le marché réalisant un profit nul (CA = coûts de production).



L'équilibre de longue période *i.e.* avec libre entrée en concurrence parfaite est donc caractérisé par :

- Un nombre endogène de firmes présentes sur le marché
- Un prix de vente égal pour chaque firme à son coût marginal de production
- Un prix de vente égal pour chaque firme à son coût moyen de production *i.e.* à son seuil de rentabilité
- Un coût marginal égal au prix de vente
- Des profits nuls *i.e.* un chiffre d'affaire égal aux coûts de production

2.1.2.– Exemples

Supposons :

- une fonction de demande, résumant le comportement des consommateurs, définie par : $D(p) = \frac{1}{p}$
- N firmes identiques, caractérisées par une même fonction de coûts : $\mathbb{C}(Y) = \frac{1}{2}Y^2 + F$

- **Cas ou le coût fixe est strictement positif : $F > 0$**

Le coût marginal de production est alors : $C_m(Y) = Y$

Et le coût moyen : $C_M(Y) = \frac{Y}{2} + \frac{F}{Y}$ (qui atteint un minimum en $\sqrt{2F}$)

Dans ce cas l'optimum de chaque firme vérifie :

$$C_m(Y) = p \quad i.e. \quad Y^* = p$$

La condition de positivité du profit maximal s'écrit :

$$\Pi^*(Y^* \mid p) = pY^* - \mathbb{C}(Y^*) \geq 0$$

$$i.e. \quad p^2 - \frac{1}{2}p^2 - F \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad p \geq \sqrt{2F}$$

qui détermine le seuil de rentabilité $\bar{p} = \sqrt{2F}$

On notera que cette condition de positivité correspond bien à la condition : $p \geq C_M(Y^*)$

L'offre de chaque firme est donc :

$$\begin{aligned} s(p) &= p && \text{si} \quad p > \sqrt{2F} \\ &= 0 && \text{si} \quad p < \sqrt{2F} \\ &= 0 \ \text{ ou } p && \text{si} \quad p = \sqrt{2F} \end{aligned}$$

Et l'offre agrégée :

$$S(p) = Np \qquad \text{si} \quad p > \sqrt{2F}$$

$$\in \left[0, N\sqrt{2F}\right] \quad \text{si} \quad p = \sqrt{2F}$$

L'équilibre du marché est alors défini par : $S(p) = D(p)$

Soit si la demande est suffisamment forte (cas $p > \sqrt{2F}$) : $Np = 1/p$

- Le prix d'équilibre est alors : $p^* = \frac{1}{\sqrt{N}}$
- Les quantités échangées à l'équilibre : $Y^* = Np^* = \sqrt{N}$
- Et chaque firme produit à l'équilibre : $\frac{Y^*}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}}$

Le profit réalisé par chaque firme présente sur le marché est donc :

$$\Pi^* = p^* \frac{Y^*}{N} - \mathbb{C}\left(\frac{Y^*}{N}\right)$$

$$= \frac{1}{2N} - F > 0$$

puisqu'on est dans le cas $p^* = \frac{1}{\sqrt{N}} > \sqrt{2F}$.

A l'équilibre de *longue période* (avec libre entrée), le nombre de firmes est endogène et défini par la condition de nullité des profits individuels, soit :

$$\frac{1}{2N} - F = 0 \iff N^* = \frac{1}{2F}$$

Dans ce cas :

- le profit de chaque firme est nul
- le prix d'équilibre est égal au seuil de rentabilité : $p^* = \frac{1}{\sqrt{N^*}} = \sqrt{2F} = \bar{p}$
- les quantités échangées à l'équilibre sont $Y^* = N^* p^* = \frac{1}{\sqrt{2F}}$
- les quantités produites par chaque firme sont : $\frac{Y^*}{N^*} = \sqrt{2F}$
- le coût marginal est : $C_m(Y^*) = p^* = \sqrt{2F}$ ce qui correspond bien au minimum du coût moyen

- **Cas d'absence de coût fixe : $F = 0$**

Le coût marginal de production est comme précédemment: $C_m(Y) = Y$

Et le coût moyen : $C_M(Y) = \frac{Y}{2}$

Dans ce cas l'optimum de chaque firme vérifie :

$$C_m(Y) = p \quad i.e. \quad Y^* = p$$

La condition de positivité du profit maximal s'écrit :

$$\Pi^*(Y^* \mid p) = pY^* - \mathbb{C}(Y^*) \geq 0 \quad i.e. \quad \frac{1}{2}p^2 \geq 0$$

qui est toujours vérifié puisque par hypothèse $p > 0$

Il n'y a donc pas de seuil de rentabilité et il est toujours rentable pour une firme de produire (puisqu'elle n'a pas de coût fixe à couvrir)

L'offre de chaque firme est donc $s(p) = p$ et l'offre agrégée : $S(p) = Np$

L'équilibre de courte période est défini par :

$$S(p) = D(p) \quad i.e. \quad Np = 1/p$$

- Le prix d'équilibre est alors : $p^* = \frac{1}{\sqrt{N}}$
- Les quantités échangées à l'équilibre : $Y^* = Np^* = \sqrt{N}$
- Et chaque firme produit à l'équilibre : $\frac{Y^*}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}}$

Le profit réalisé par chaque firme présente sur le marché est donc :

$$\Pi^* = p^* \frac{Y^*}{N} - \mathbb{C}\left(\frac{Y^*}{N}\right) = \frac{1}{2N}$$

En *longue période* (avec libre entrée), le nombre de firmes est endogène et augmente tant que le profit reste positif *i.e.* jusqu'à l'infini. On a alors :

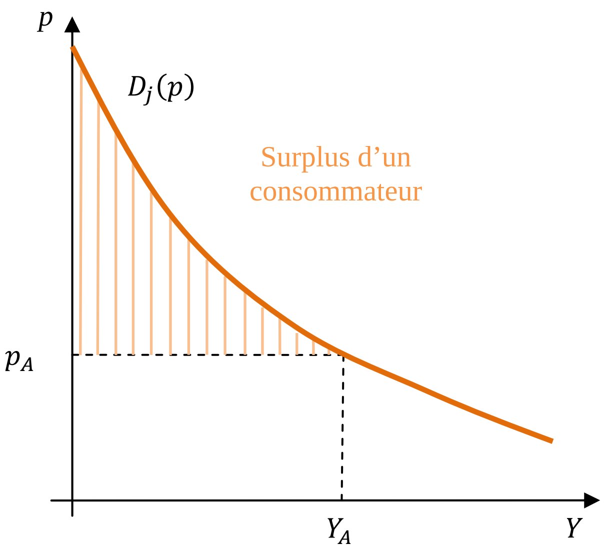
- $N^* \to \infty$
- $Y^* \to \infty$
- La production de chaque firme $\to 0$

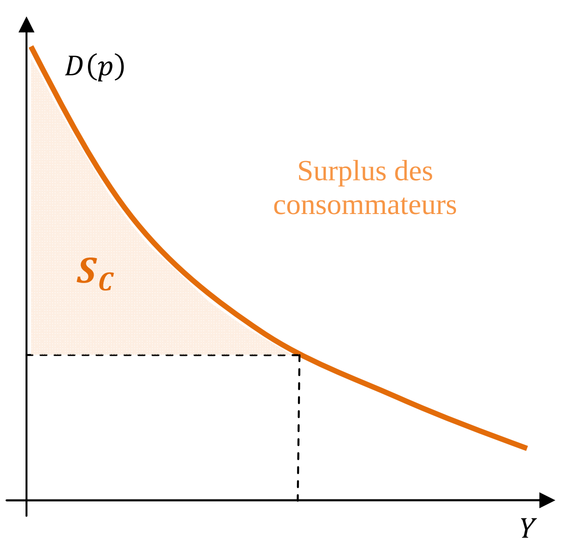
Une infinité de firmes est présente sur le marché. Chaque firme produit $\varepsilon \to 0$ et est infiniment petite par rapport à la taille du marché (concurrence parfaite)

2.2. – Propriétés de l'équilibre : surplus collectif

2.2.1. – Surplus des consommateurs

Le surplus d'un consommateur, noté S_C, est la différence entre ce qu'il paye et ce qu'il serait prêt à payer





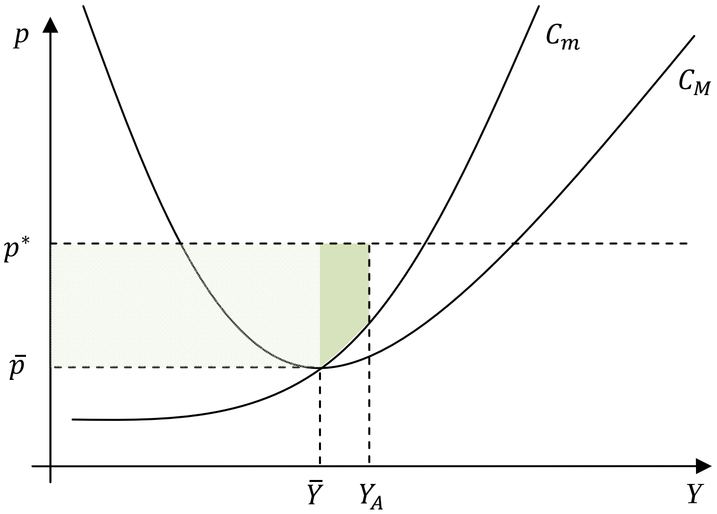
2.2.2. – Surplus des entreprises

- **Surplus d'une firme**

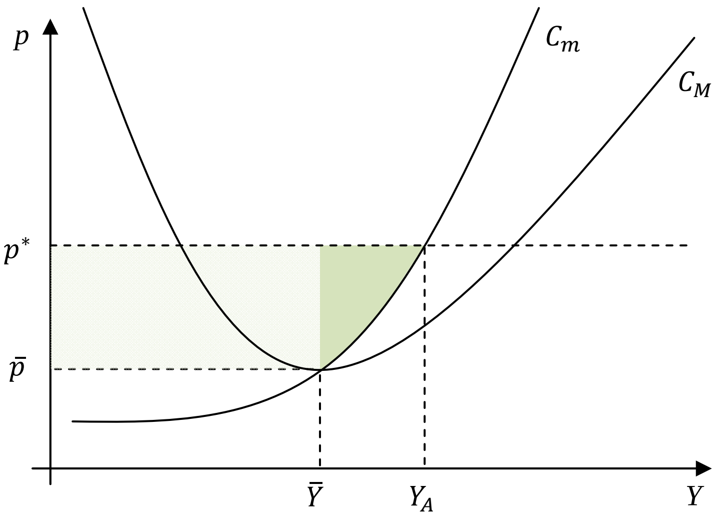
Le surplus S d'une firme est défini comme la somme des marges réalisées par l'entreprise sur chaque unité produite, ce qui représente *in fine* le profit réalisé par l'entreprise. Si une firme produit la quantité Y_A qu'elle vend au prix p^* quel est son surplus ?

- Si elle produit $\bar{Y}$ qu'elle vend au prix p^* elle réalise un profit égal à la surface en vert clair
- Le profit supplémentaire apporté à la firme par chaque unité additionnelle au delà de $\bar{Y}$ étant donné par la différence entre le prix de vente p^* et le C_m, la vente au-delà de $\bar{Y}$ jusqu'à Y_A lui permet d'accroître son profit de la surface en vert foncé

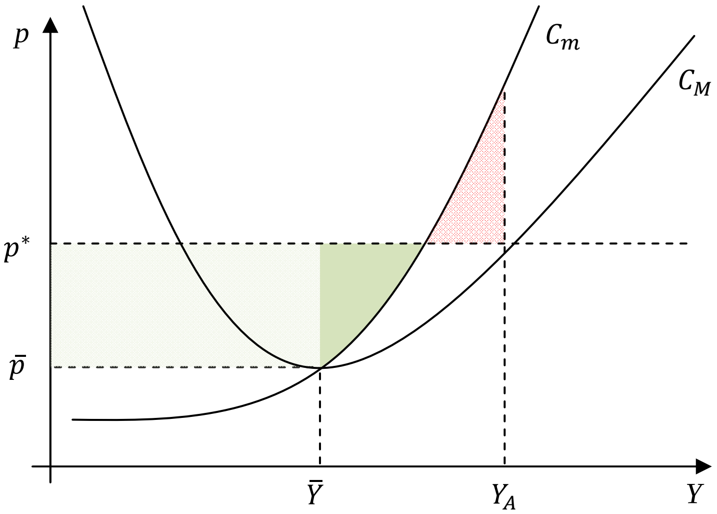
Le surplus de la firme associé à la quantité Y_A vendue au prix p^* est donc la somme des 2 surfaces vertes



Au fur et à mesure qu'on augmente Y_A le surplus s'accroît et il est maximum quand le C_m est égal au prix p^*

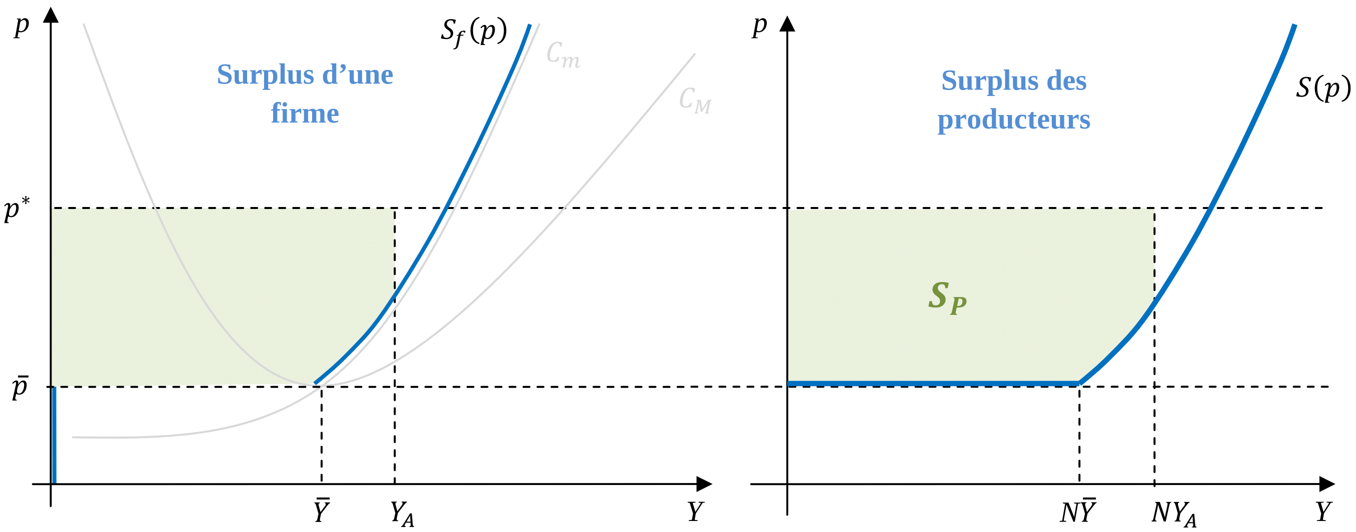


Si on continue alors d'augmenter Y_A, la firme commence à faire des pertes (en rouge) qui viennent diminuer le surplus



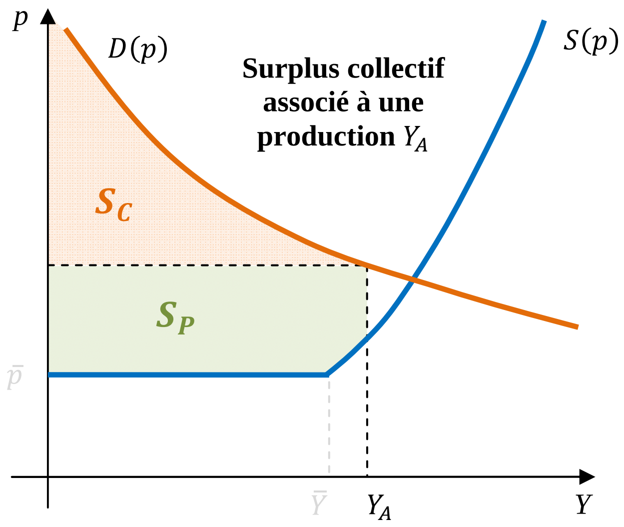
- **Surplus des producteurs**

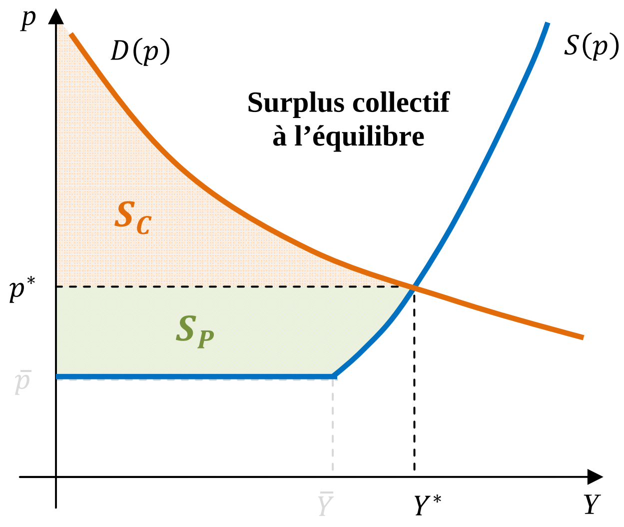
Par symétrie avec le consommateur on peut aussi définir le surplus du producteur à partir de la fonction d'offre



2.2.3. – Surplus collectif

Le surplus collectif, ou surplus global, noté S est la somme du surplus des producteurs et des consommateurs : $S = S_C + S_P$





Au fur et à mesure que la production augmente, le surplus global augmente, jusqu'en Y^*ou il est maximal. L'équilibre de concurrence parfaite maximise le bien-être des agents : le marché est efficace. L'allocation des ressources est efficace au sens de Pareto.

Chapitre 2. – Monopole

Situation opposée à la concurrence parfaite : la firme est seule sur son marché

		Produit	
		Homogène	**Différencié**
Nombre de firmes	**Important**	Concurrence parfaite *(petits agriculteurs)*	Concurrence monopolistique *(restaurants, écoles privées, boulangeries)*
	Limité	Oligopole *(électricité, gaz, TV câble, opérateurs téléphonie)*	Oligopole différencié *(voitures, sodas, téléphones)*
	Deux	Duopole *(Google/FaceBook pub en ligne)*	Duopole différencié *(Airbus/Boeing, Apple/Samsung)*
	Une	Monopole *(eau, SNCF)*	

Cela ne signifie pas que la firme peut « faire ce qu'elle veut », car elle doit tenir compte :

- De la demande *i.e.* de ses clients : un prix trop élevé peut tellement limiter la demande que la firme ne maximise plus son profit. Les clients se reportent sur des biens alternatifs : transport aérien si le prix du transport ferroviaire est trop élevé
- D'éventuels concurrents qui pourraient entrer sur le marché si les profits sont trop élevés

3 caractéristiques de la situation de monopole :

- Le bien produit par la firme n'a pas de substitut très proche
- Il existe une *barrière à l'entrée* sur le marché
- La firme peut agir sur le prix de vente : elle a la possibilité de volontairement réduire la quantité mise sur le marché pour augmenter le prix de vente

1. – L'équilibre de monopole

1.1. – Origines de la situation de monopole

- **Monopole naturel**

C'est le cas lorsque le coût de production d'une quantité quelconque mise sur le marché est plus faible quand il y a une seule firme qui produit que lorsqu'il y en a plusieurs. C'est ce qui se passe quand il y a des économies d'échelle : rendements d'échelle croissants.

Dans une telle situation la recherche de l'efficacité économique conduit à ne conserver qu'une firme sur le marché : transports urbains, distribution d'eau *etc.* (même si logiquement on doit distinguer la gestion du réseau de son exploitation)

- **Brevets, contrôle d'une ressource rare**

Le contrôle d'une matière première rare par une firme donne à celle-ci une position de quasi-monopole sur le marché du produit transformé

- approvisionnement en bauxite contrôlé par Alcoa aux USA avant 1945, lui donnant une position de quasi-monopole sur le marché de l'aluminium
- entreprise SudAfricaine De Beers qui contrôle 80% de la production de diamants

Les brevets peuvent aussi créer une situation – temporaire – de monopole (monopole d'innovation de Schumpeter). La rentabilité créée par la situation de monopole liée au brevet est une incitation à la recherche

- **Monopole institutionnel**

On parle de monopole institutionnel quand la position de monopole est accordée par la puissance publique à une entreprise particulière : SNCF, distribution d'électricité il y a quelques années

- **Le monopole issu…du jeu de la concurrence**

Dans ce cas ce sont les mécanismes de la concurrence qui conduisent à la situation de monopole

- Sélection naturelle : seules les entreprises les plus efficaces survivent. Parfois une seule.
- Comportement de prédation : une entreprise fixe des prix inférieurs au seuil de rentabilité pour tuer les concurrents et pouvoir jouir ensuite des surprofits associés à une situation de monopole

1.2. – Détermination du prix et des quantités vendues

On note comme précédemment $Y = D(p)$ – avec $D'(p) < 0$ – la quantité demandée au prix p

La fonction de demande inverse notée $p = D^{-1}(Y) = p(Y)$ – avec $p'(Y) < 0$ – indique le prix p permettant de vendre sur le marché une quantité Y

1.2.1. – Détermination simultanée de la quantité vendue et des demandes de facteurs

En notant de façon usuelle Y la quantité vendue, x_i la quantité de facteur i utilisée, c_i le coût du facteur i, $F(\cdot)$ la fonction de production et $D(p)$ la fonction de demande, le programme du monopole s'écrit :

$$\underset{\{Y,p,x_1,\dots,x_n\}}{\text{Max}} \quad \Pi(Y,p,x_1,\dots,x_n \mid c_1,\dots,c_n) = pY - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$s.t. \qquad Y \leq F(x_1,\dots,x_n)$$

$$Y = D(p)$$

Il a pour objectif de déterminer :

- les *demandes de facteurs* : $X^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ – notées également $X^d = (x_1^d, \dots, x_n^d)$
- la production de la firme Y^* *i.e.* son *offre de bien* – notée également Y^S ou $S(p)$

Les variables endogènes sont : $Y, p, x_1, \dots, x_n$

Les variables exogènes : $c_1, \dots, c_n$

La contrainte technologique étant saturée à l'optimum (condition de non gaspillage d'inputs) la solution du programme précédent est donnée par la solution de :

$$\underset{\{x_1,\dots,x_n\}}{\text{Max}} \quad Z(x_1, \dots, x_n) = D^{-1}(F(x_1, \dots, x_n))F(x_1, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

Les n conditions du premier ordre sont :

$$\nabla Z = 0 \qquad i.e. \qquad \frac{\partial Z}{\partial x_i} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Dont la résolution en $x_1, \dots, x_n$ donne les demandes de facteurs du monopole : $X^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$

En reportant celles-ci dans la fonction de production on obtient la production : $Y^* = F(x_1^*, \dots, x_n^*)$

Et par la fonction de demande inverse on a alors le prix de vente en monopole : $p^* = D^{-1}(Y^*)$

1.2.2. – Résolution en utilisant la fonction de coûts : programme dual

- **La fonction de coûts**

La première étape, consiste à déterminer la fonction de coûts de la firme : *cf.* chapitre 0, 2$^{\text{ème}}$ partie, section 2.1 et 2.3 pour une présentation complète et des exemples

Pour mémoire on cherche le coût minimal permettant de produire un niveau Y donné

Le problème s'écrit sous la forme d'un programme:

$$\underset{\{x_1,\dots,x_n\}}{\text{Min}} \quad C(x_1, \dots, x_n \mid c_1, \dots, c_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$s.t. \quad F(x_1, \dots, x_n) \geq Y$$

Les variables endogènes sont : $x_1, \dots, x_n$

Les variables exogènes sont : $c_1, \dots c_n$ et Y

La résolution de ce programme permet de déterminer les n demandes de facteurs *conditionnelles* de la firme $\tilde{x}_i = \tilde{x}_i(c_1, \dots, c_n, Y) \quad i = 1, \dots, n$ et finalement sa fonction de coût :

$$\mathbb{C}(Y) = \sum_{i=1}^{n} c_i \tilde{x}_i(c_1, \dots, c_n, Y)$$

- **Le problème du monopole**

Le programme s'écrit :

$$\underset{\{Y,p\}}{\text{Max}} \quad \Pi(Y,p) \;=\; pY - \mathbb{C}(Y)$$

$$s.t. \quad Y = D(p) \qquad D'(p) < 0$$

En utilisant la fonction de demande inverse $p(Y) = D^{-1}(Y)$ ce programme se réécrit identiquement :

$$\underset{\{Y\}}{\text{Max}} \quad \Pi(\text{Y}) \;=\; \underbrace{p(Y)Y}_{R(Y)} - \mathbb{C}(Y)$$

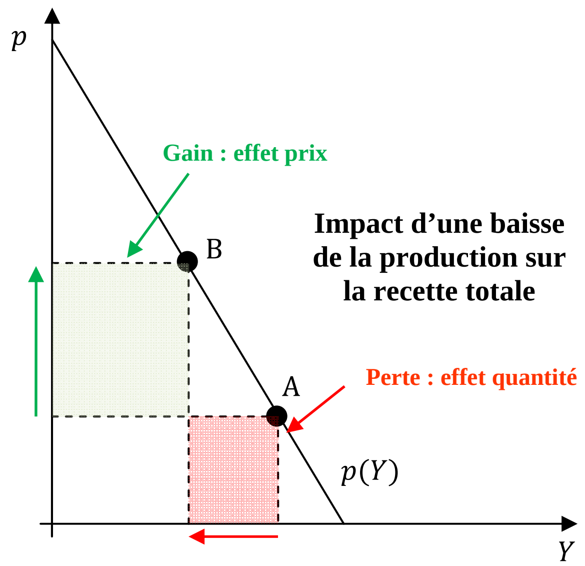
Le terme de droite $R(Y)$ est la recette totale associée à une quantité produite et vendue égale à Y, le terme de gauche $\mathbb{C}(Y)$ le coût total associé à cette même quantité et on a $p'(Y) < 0$.

Nota : On notera qu'on peut aussi résoudre le programme en p :

$$\underset{\{p\}}{\text{Max}} \quad \Pi(\text{p}) \;=\; \underbrace{pD(p)}_{R(p)} - \mathbb{C}\big(D(p)\big)$$

Contrairement à la situation de concurrence parfaite où la firme n'a aucun moyen de modifier le prix de vente p qui est une donnée, le monopole a la possibilité de volontairement limiter les quantités mises sur le marché pour bénéficier d'un prix de vente plus élevé

En diminuant la production, $\mathbb{C}(Y)$ diminue tandis que $R(Y) = p(Y)Y$ subit deux influences contradictoires : la firme vend une moindre quantité…mais à un prix plus élevé. Il peut donc être intéressant pour la firme de limiter la quantité produite.



- **Résolution du problème**

La solution du programme ci-dessus est donnée par : $\Pi'(\text{Y}) = R'(Y) - \mathbb{C}'(Y) = 0$

L'optimum est donc défini par l'égalité entre recette marginale et coût marginal :

$$R_m(Y) = C_m(Y)$$

La firme augmente sa production tant que la recette R_m que lui rapporte la vente d'une unité supplémentaire est supérieure à ce qu'elle lui coute à produire C_m.

La résolution de cette équation en Y donne la production Y^* en situation de monopole, qu'il suffit de reporter dans la fonction de demande inverse pour avoir le prix d'équilibre : $p^* = D^{-1}(Y^*)$

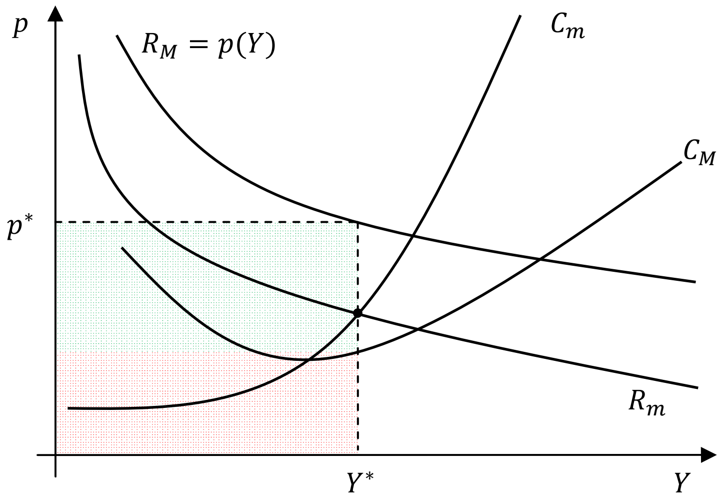
1.2.3. – Représentation graphique

Les courbes de C_M et de C_m sont les mêmes qu'en concurrence parfaite

La recette moyenne est donnée par la fonction de demande inverse : $R_M = \frac{R(Y)}{Y} = p(Y)$. C'est donc une fonction décroissante de la quantité produite.

La recette marginale est définie par : $R_m = R'(Y) = \underbrace{p'(Y)Y}_{<0} + p(Y) < p(Y)$

- R_m est donc toujours inférieure à R_M
- en $Y = 0$ on a $R_m = R_M = p(0)$



Le profit de monopole est représenté par le rectangle vert, tandis que les coûts de production sont figurés par le rectangle rouge (le chiffre d'affaire étant la somme des deux rectangles)

1.3. – Propriétés de l'équilibre de monopole

1.3.1. – Comparaison avec la situation de concurrence parfaite

- **Prix de vente, production et profit**

L'équilibre est défini par

$$R_m = p'(Y)Y + p(Y) \quad = C_m$$

- En concurrence parfaite le prix p est exogène et ne dépend pas du niveau de production de la firme : $p'(Y) = 0$.

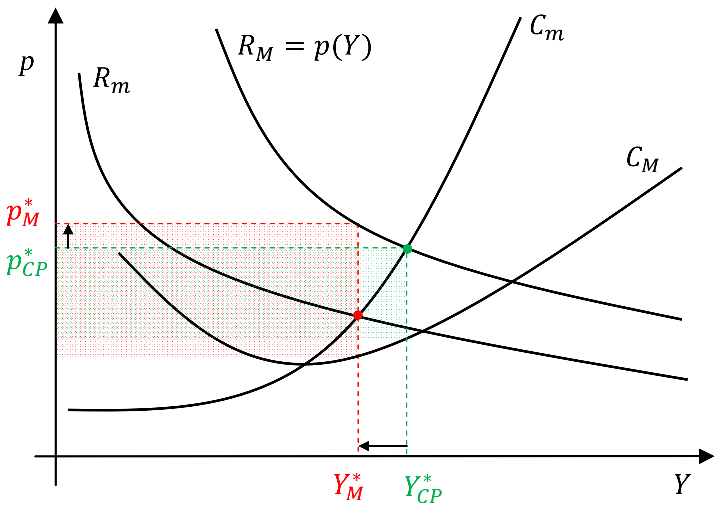
On a donc : $p = C_m$

- En situation de monopole le prix dépend du niveau de production de la firme. Plus le niveau de production augmente et plus le prix baisse : $p'(Y) < 0$.

  On a donc : $p > C_m$

La situation de monopole permet à la firme, en restreignant volontairement les quantités produites, d'obtenir un prix supérieur au coût marginal : $Y_M < Y_{CP}$ et $p_M > p_{CP}$

Cela permet à la firme d'obtenir en situation de monopole un profit (en rouge) plus élevé qu'en situation concurrentielle (en vert) : $\Pi_M > \Pi_{CP}$



- **Ecart entre prix et coût marginal**

On a : $R_m = p'(Y)Y + p(Y) = C_m$

$$\Rightarrow \quad \frac{p(Y) - C_m}{p(Y)} = \frac{-p'(Y)Y}{p(Y)}$$

avec : $p(Y) = D^{-1}(Y) \Rightarrow D\big(p(Y)\big) = Y \Rightarrow D'\big(p(Y)\big)p'(Y) = 1$

On a donc : $\frac{p - C_m}{p} = \frac{-D(p)}{D'(p)p} = \frac{-1}{\sigma_p^D}$ *i.e.* $p = \underbrace{\frac{\sigma_p^D}{1+\sigma_p^D}}_{\gamma} . C_m$

où σ_p^D est l'élasticité de la demande par rapport au prix

Comme $R_m = p'(Y)Y + p(Y) > 0$ on a :

$$\frac{D(p)}{D'(p)} + p > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_p^D = \frac{D'(p)p}{D(p)} < -1$$

Le taux de marge (*price mark-up*) γ sur le coût marginal est donc supérieur à l'unité : $\gamma > 1$

Moins la demande est sensible au prix, plus le taux de marge γ sur le coût marginal est fort :

- Si la demande est infiniment élastique au prix : $\lim_{\sigma_p^D \to -\infty} \gamma = 1$ et on retrouve le cas de concurrence parfaite $p = C_m$
- Si l'élasticité de la demande au prix est minimale : $\lim_{\sigma_p^D \to -1} \gamma = +\infty$. Le taux de marge est maximal.

- **Condition du second ordre**

En concurrence parfaite le programme du producteur s'écrit :

$$\underset{\{Y\}}{\text{Max}} \quad \Pi(\mathrm{Y}) = \underbrace{pY}_{R(Y)} - \mathbb{C}(Y)$$

La condition du 2nd ordre est alors $\Pi''(\mathrm{Y}) = -\mathbb{C}''(Y) < 0$ *i.e.* $\mathbb{C}''(Y) > 0$. Le coût marginal doit donc être strictement croissant en Y et les rendements d'échelle décroissants.

En monopole le programme du producteur s'écrit :

$$\underset{\{Y\}}{\text{Max}} \quad \Pi(\mathrm{Y}) = \underbrace{p(Y)Y}_{R(Y)} - \mathbb{C}(Y)$$

La condition du 2nd ordre est alors :

$$\Pi''(\mathrm{Y}) = p''(Y)Y + 2p'(Y) - \mathbb{C}''(Y) < 0$$

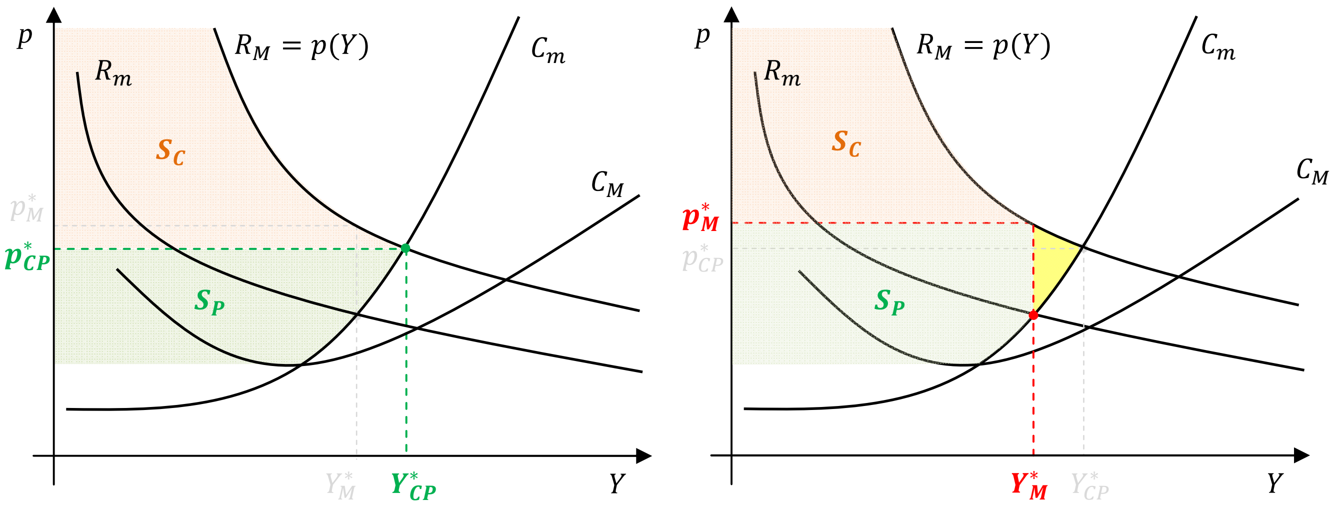
$$i.e. \qquad \mathbb{C}''(Y) > \underbrace{p''(Y)Y + 2p'(Y)}_{<0}$$

qui n'exclut pas la possibilité de rendements d'échelle croissants

1.3.2. – Surplus collectif et bien être

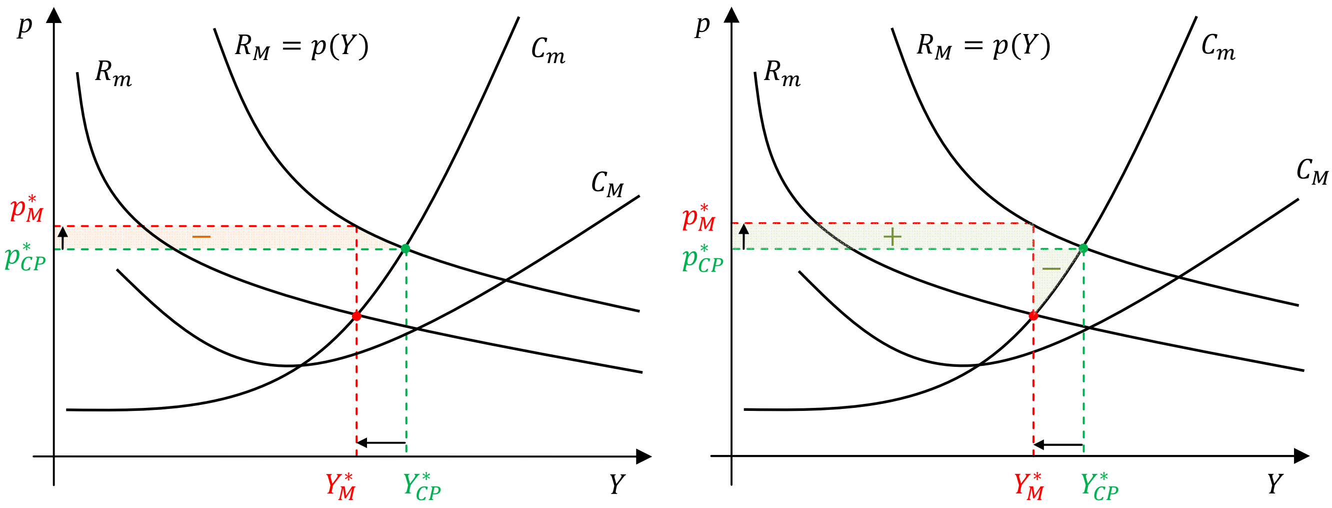
Les graphiques ci-dessous représentent les surplus des consommateurs et des producteurs, et donc le surplus collectif, dans les cas de concurrence parfaite et de monopole

La situation de monopole se traduit par une perte de surplus collectif (en jaune) par rapport à la situation concurrentielle : le monopole limite sa production alors que des consommateurs seraient prêts à payer, pour une unité supplémentaire, un prix supérieur au coût marginal de production. L'allocation des ressources n'est donc pas efficace au sens de Pareto.



Les graphiques ci-dessous montrent l'impact sur les surplus des consommateurs et des producteurs du passage d'une situation concurrentielle à une situation de monopole :

- baisse du surplus des consommateurs
- augmentation du surplus des producteurs



(i) baisse du surplus des consommateurs *(ii)* hausse du surplus des producteurs

1.4. – Exemple

On considère une économie à une seule firme caractérisée par :

- Demande → fonction de demande inverse : $p(Y) = a - bY$
- Offre → fonction de coûts : $\mathbb{C}(Y) = \frac{1}{2}Y^2$

- **Concurrence parfaite**

L'offre de la firme est déterminée par : $C_m = p \quad i.e. \quad Y^S = p$

D'après la fonction de demande inverse, la demande est : $Y^D = \frac{a-p}{b}$

L'équilibre est alors défini par : $Y^D = Y^S \Rightarrow \quad p_{CP}^* = \frac{a}{1+b} \quad \Rightarrow \quad Y_{CP}^* = \frac{a}{1+b}$

Surplus :

- $S_{CP}^{Prod} = \Pi_{\text{CP}} = p_{CP}^* Y_{CP}^* - \frac{1}{2}{Y_{CP}^*}^2 = \frac{a^2}{2(1+b)^2}$
- $S_{CP}^{Cons} = \int_0^{Y_{CP}^*} (p(Y) - p_{CP}^*)\, dY = \left[aY - \frac{b}{2}Y^2\right]_0^{Y_{CP}^*} - \int_0^{Y_{CP}^*} p_{CP}^*\, dY = \frac{a^2 b}{2(1+b)^2}$
- $S_{CP} = S_{CP}^{Cons} + S_{CP}^{Prod} = \frac{a^2}{2(1+b)}$

- **Monopole**

L'équilibre de monopole est déterminé par : $C_m = R_m \quad i.e. \quad Y = p'(Y)Y + p(Y)$

Le niveau de production est donc donné par : $Y = a - 2bY \quad \Leftrightarrow \quad Y_M^* = \frac{a}{1+2b}$

Et on obtient le prix de vente par la fonction de demande inverse : $p_M^* = \frac{a(1+b)}{1+2b}$

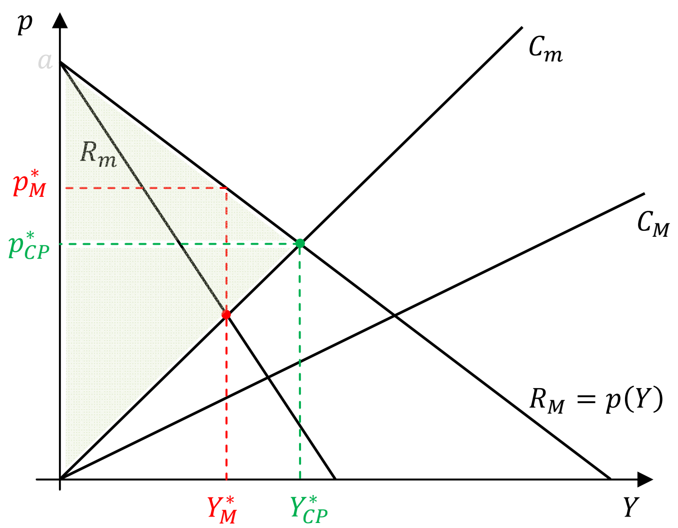
Surplus :

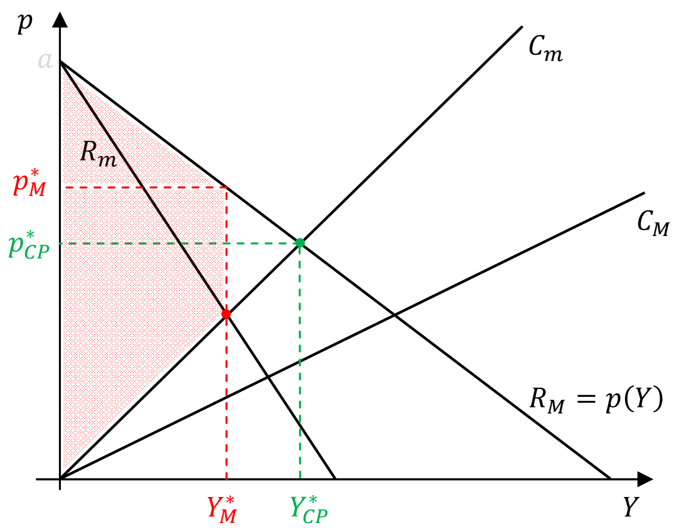
- $S_M^{Prod} = \Pi_\mathrm{M} = p_M^* Y_M^* - \frac{1}{2} {Y_M^*}^2 = \frac{a^2}{2(1+2b)} > S_{CP}^{Prod}$
- $S_M^{Cons} = \int_0^{Y_M^*} (p(Y) - p_M^*)\, dY = \left[aY - \frac{b}{2}Y^2\right]_0^{Y_M^*} - \int_0^{Y_M^*} p_M^*\, dY = \frac{a^2 b}{2(1+2b)^2} < S_{CP}^{Cons}$
- $S_M = S_M^{Cons} + S_M^{Prod} = \frac{a^2(1+3b)}{2(1+2b)^2} < S_{CP}$

- **Représentations graphiques**

$C_m = Y \quad , \quad C_M = \frac{1}{2} Y \quad , \quad R_m = a - 2bY \quad , \quad R_M = a - bY = p(Y)$

En vert le surplus global en concurrence parfaite *vs* en rouge en situation de monopole





2. – Discrimination par les prix

Idée : le monopole peut avoir intérêt à pratiquer des prix unitaires variables ou à vendre à des prix différents selon les clients

Le monopole classique ne dispose d'aucune information lui permettant de discriminer : il ne connaît que la demande globale du marché

L'intérêt de la discrimination est qu'elle permet au producteur d'accroître son profit en captant une partie du surplus des consommateurs.

On distingue trois types ou degrés de discrimination :

		Prix payé par un consommateur	
		Constant	**Variable**
Prix d'une unité de bien	**Constant**	Monopole classique	Discrimination au 3ème degré Segmentation du marché selon le type de clientèle : jeunes/vieux, nationaux/étrangers, actifs/étudiants, hommes/femmes *etc.*
	Variable	Discrimination au 2ème degré Remises en fonction des quantités achetées	Discrimination au 1er degré (*discrimination parfaite*) Chaque unité est vendue à un prix qui diffère selon « quantité achetée x consommateur »

Le rôle de l'information est central : plus la firme dispose d'informations (sur les demandes individuelles) et plus elle va être en mesure de discriminer et de capter une partie importante du surplus des consommateurs :

Forme de discrimination	**Structure informationnelle**
Premier degré	• les demandes individuelles sont toutes connues
Deuxième degré	• l'existence de différentes demandes individuelles et leur formes sont connues ; • le monopole ne peut attribuer à un client sa fonction de demande
Troisième degré	• le monopole peut segmenter le marché • le monopole ne connaît que les demandes globales des segments • les demandes individuelles ne sont pas connues

2.1. – La discrimination au 1er degré : discrimination parfaite

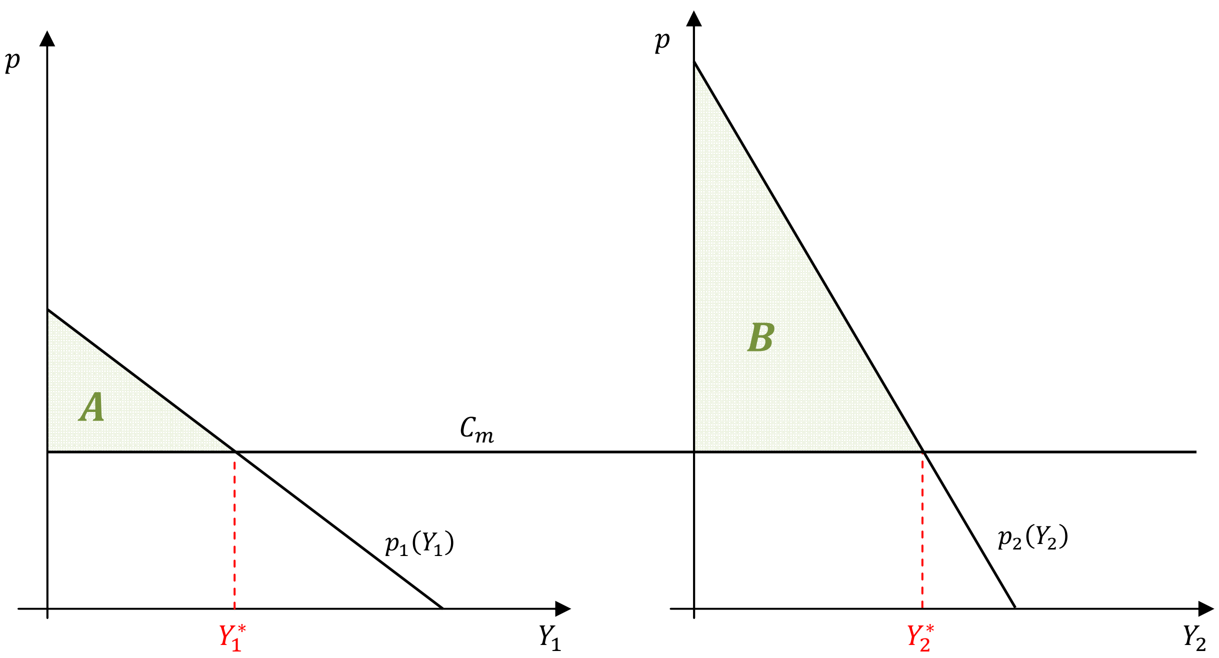
Dans ce cas d'école, mais intéressant du point de vue analytique, le monopole observe toutes les fonctions de demande individuelles et donc les disponibilités à payer de tous les consommateurs.

Il va donc vendre chaque unité de bien au prix le plus élevé possible c'est-à-dire au prix de réserve de chaque consommateur.

Supposons à titre d'exemple que le coût marginal C_m soit constant et qu'il y ait 2 consommateurs caractérisés par des fonctions de demandes différentes.

Le comportement optimal du producteur pour maximiser son surplus est alors de proposer à chaque consommateur un couple prix-quantité « *à prendre ou à laisser* » :

- au consommateur n°1 il propose la quantité Y_1^* pour un montant correspondant à la surface A
- au consommateur n°2 il propose la quantité Y_2^* pour un montant correspondant à la surface B



Par un tel comportement le monopole capture à son bénéfice la totalité du surplus de tous les consommateurs. Dans une telle situation le surplus des consommateurs est donc nul, $S_C = 0$, tandis que le monopole reçoit la totalité du surplus, $S_P = A + B$

Plusieurs caractéristiques associées à ce type de discrimination sont intéressantes à observer :

- comme en concurrence parfaite l'allocation des ressources est efficace au sens de Pareto. On ne peut pas dégager de surplus supplémentaire en augmentant ou en baissant le niveau de production.
- le monopole produit une quantité identique à celle qui serait produite en concurrence parfaite : le prix est égal au coût marginal et l'offre à la demande

Il est difficile d'imaginer des exemples concrets de discrimination parfaite. Un cas qui pourrait s'en rapprocher est celui du seul psychanalyste d'une petite ville isolée qui pratiquerait pour ses patients des prix différents suivant leur capacité à payer.

2.2. – La discrimination au 3ème degré

Le monopole dispose d'information sur les demandes de différents groupes de consommateurs, définis par des critères observables : âge, sexe, statut (actif/étudiant), localisation, circuit de distribution (grande surface/petit commerce) *etc.*

Connaissant la demande de chaque groupe - mais pas les demandes individuelles -, il peut alors « segmenter » son marché *i.e.* moduler ses prix en fonction du groupe auquel appartient le client.

Ainsi si la demande est plus sensible au prix de vente dans un groupe - les jeunes - que dans un autre - les vieux - le monopole utilisera cette information pour accroître son profit en proposant un prix plus élevé aux seconds qu'aux premiers.

2.2.1. – Modélisation

Supposons N groupes de clients indicés par i ayant des fonctions de demandes différentes :

$$Y_i = D_i(p), \quad D_i'(p) < 0 \quad i = 1, \dots, N$$

Les fonctions de demande inverse sont alors également différentes et propre à chaque groupe :

$$p_i = D_i^{-1}(Y_i) = p_i(Y_i), \quad p_i'(Y_i) < 0, \quad i = 1, \dots, N$$

où p_i représente le prix maximal auquel la quantité Y_i peut être vendu au client du groupe i

Le problème du monopole est alors :

$$\underset{\{Y_1,\dots,Y_N\}}{\text{Max}} \quad \Pi(Y_1, \dots, Y_N) = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} p_i(Y_i)Y_i}_{R(Y_1,\dots,Y_N)} - \mathbb{C}\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i\right)$$

où le premier terme du profit représente la recette totale du monopole et le second le coût total de production

Les N conditions du 1er ordre s'écrivent simplement :

$$\nabla\Pi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R_i^m = \mathbb{C}'_{Y_i}(\cdot) = C_m \quad \forall i = 1, \dots, N$$

$$\text{avec} \qquad R_i^m = R'_{Y_i}(\cdot) = p_i'(Y_i)Y_i + p_i(Y_i)$$

A l'optimum la recette marginale est identique pour tous les groupes de clients et égale au coût marginal de production

La résolution de ce système de N équations à N inconnues permet de déterminer les quantités produites par le monopole pour chaque groupe de clients : $Y^* = (Y_1^*, \dots, Y_N^*)$

Les prix de vente, propres à chaque groupe de clients, sont ensuite obtenus en reportant ces quantités dans les fonctions de demande inverse correspondantes : $P^* = (\underbrace{p_1(Y_1^*)}_{p_1^*}, \dots, \underbrace{p_N(Y_N^*)}_{p_N^*})$

2.2.2. – Propriétés

Les N conditions d'optimalité sont :

$$p_i'(Y_i)Y_i + p_i(Y_i) = \underbrace{\mathbb{C}'(Y_i + Y_{-i})}_{C_m}$$

En faisant le même raisonnement qu'en 1.3.1. on a donc :

$$p_i = \underbrace{\frac{\sigma_p^{D_i}}{1 + \sigma_p^{D_i}}}_{\gamma_i} . C_m \qquad \forall i = 1, \dots, N$$

où $\sigma_p^{D_i} < 0$ est l'élasticité prix de la demande des clients du groupe *i*

Plus la demande est sensible au prix, *i.e.* plus $\left|\sigma_p^{D_i}\right|$ est forte, plus γ_i est faible : la firme choisit, pour chaque groupe de clients, un prix d'autant plus fort que leur demande est inélastique

2.2.3. – Illustration

Considérons une firme dont la fonction de coûts est $\mathbb{C}(Y) = Y$ et qui est confrontée à 2 groupes de clients ayant des fonctions de demandes linéaires différentes :

$$Y_1 = D_1(p) = a - p \qquad vs \qquad Y_2 = D_2(p) = a - 2p \qquad a > 2$$

Nota : On remarque que l'élasticité-prix de la demande des clients du second groupe est – en valeur absolue - plus forte que celle associée à la demande des clients du premier groupe :

$$\sigma_p^{D_1} = \frac{D_1'(p)p}{D_1(p)} = \frac{-p}{a - p} \qquad vs \qquad \sigma_p^{D_2} = \frac{D_2'(p)p}{D_2(p)} = \frac{-p}{a/2 - p} \qquad \Rightarrow \quad \left|\sigma_p^{D_2}\right| > \left|\sigma_p^{D_1}\right|$$

Les fonctions de demande inverse propre à chaque groupe sont ici :

$$p_1(Y_1) = D_1^{-1}(Y_1) = a - Y_1 \qquad vs \qquad p_2(Y_2) = D_2^{-1}(Y_2) = \frac{a - Y_2}{2}$$

Et le problème du monopole discriminant s'écrit simplement :

$$\underset{\{Y_1, Y_2\}}{\text{Max}} \quad \Pi(Y_1, Y_2) = \underbrace{\underbrace{p_1(Y_1)Y_1}_{R_1(Y_1)} + \underbrace{p_2(Y_2)Y_2}_{R_2(Y_2)}}_{R(Y_1, Y_2)} - \underbrace{(Y_1 + Y_2)}_{\mathbb{C}(Y_1 + Y_2)}$$

Les conditions du premier ordre sont alors :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathrm{Y}_1} = \underbrace{(a - 2\mathrm{Y}_1)}_{R_1'(Y_1)} - 1 = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathrm{Y}_2} = \underbrace{(a/2 - \mathrm{Y}_2)}_{R_2'(Y_2)} - 1 = 0$$

dont la résolution permet de détermine Y_1^* et Y_2^* et *in fine* la production globale du monopole discriminant $Y^* = Y_1^* + Y_2^*$ et les prix de vente sur chaque segment de marché p_1^* et p_2^*

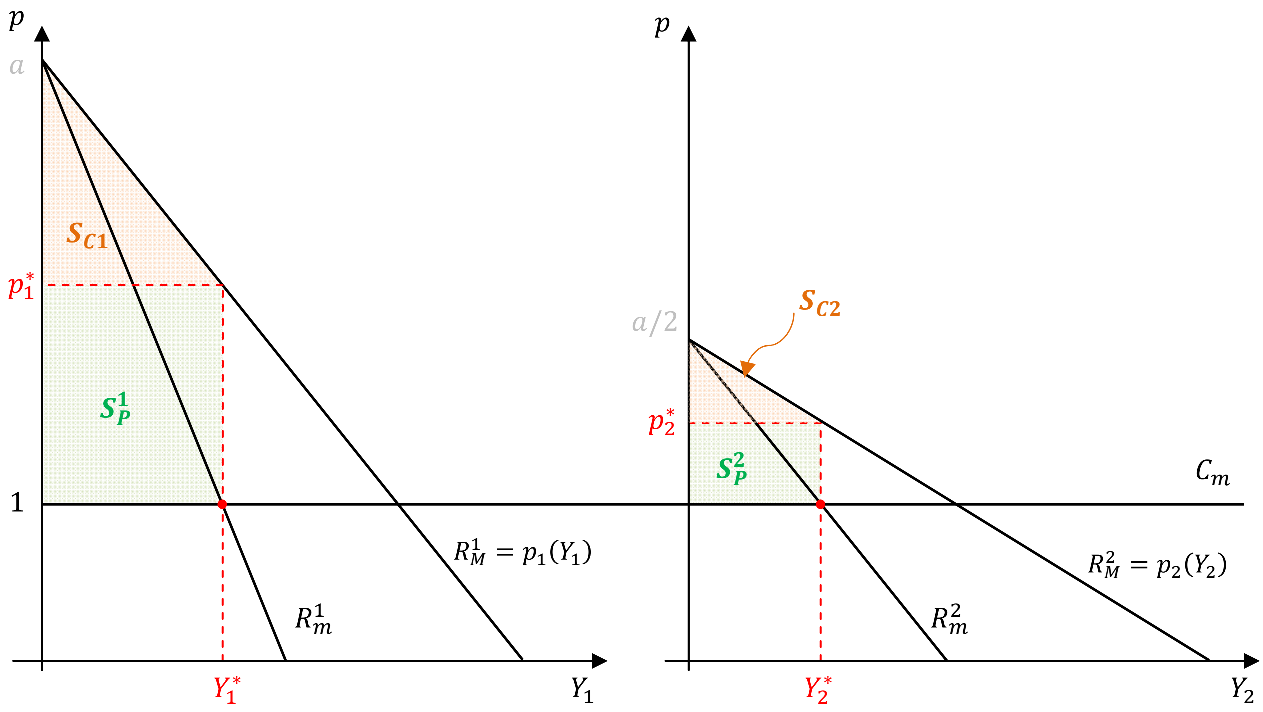
$$Y_1^* = \frac{a-1}{2}, \quad Y_2^* = \frac{a-2}{2}, \quad Y^* = a - \frac{3}{2}, \quad p_1^* = a - Y_1^* = \frac{a+1}{2}, \quad p_2^* = \frac{a-Y_2^*}{2} = \frac{a+2}{4}$$

On remarque qu'on a $p_1^* > p_2^*$ ce qui est cohérent puisque $\left|\sigma_p^{D_2}\right| > \left|\sigma_p^{D_1}\right|$

Les représentations graphiques ci-après permettent d'identifier le processus conduisant à la discrimination.

- Groupe 1 : $R_m^1 = a - 2Y_1$, $R_M^1 = a - Y_1 = p_1(Y_1)$
- Groupe 2 : $R_m^2 = \frac{a}{2} - Y_2$, $R_M^2 = \frac{a-Y_2}{2} = p_2(Y_2)$

Le surplus des consommateurs est $S_C = S_{C1} + S_{C2}$ tandis que celui du monopole discriminant est $S_P = S_P^1 + S_P^2$



2.2.4. – Intérêt de la discrimination

On pose pour simplifier $a = 4$

- **Cas ou le monopole discrimine**

Le surplus du producteur est le profit réalisé sur les deux segments du marché :

$$S_P^D = p_1^* Y_1^* + p_2^* Y_2^* - \underbrace{(Y_1^* + Y_2^*)}_{\mathbb{C}(Y_1^*+Y_2^*)} = 11/4$$

Le surplus du consommateur est la somme des surplus des 2 groupes de clients :

$$S_{C1}^D = \int_0^{Y_1^*} \left(p_1(Y_1) - p_1^*\right) \mathrm{d}Y_1 = \left[\frac{3}{2}Y_1 - \frac{Y_1^2}{2}\right]_0^{3/2} = 9/8$$

$$S_{C2}^D = \int_0^{Y_2^*} \left(p_2(Y_2) - p_2^*\right) \mathrm{d}Y_2 = \left[\frac{1}{2}Y_2 - \frac{Y_2^2}{4}\right]_0^{1} = 1/4$$

Soit : $S_C^D = 11/8$

- **Cas ou le monopole ne discrimine pas**

Dans ce cas le prix p est le même sur les 2 segments du marché. La demande des consommateurs est alors :

$$D(p) = D_1(p) + D_2(p) = 8 - 3p$$

Et la fonction de demande inverse : $p(Y) = \frac{8-Y}{3}$

La recette totale est donc $R(Y) = p(Y)Y = \frac{8}{3}Y - \frac{1}{3}Y^2$ et la condition d'égalité entre recette marginale et coût marginal donne la production et le prix fixé par le monopole :

$$\frac{8}{3} - \frac{2}{3}Y = 1 \quad \Leftrightarrow \quad Y^* = 5/2 \quad i.e. \quad p^* = 11/6$$

A ce prix les quantités achetées par chacun des groupes de clients sont :

$$Y_1^* = D_1(p^*) = 4 - p^* = 13/6 \quad vs \quad Y_2^* = D_2(p^*) = 4 - 2p^* = 1/3$$

Le surplus du producteur est dans ce cas :

$$S_P^{ND} = p^* Y^* - Y^* = 25/12$$

Tandis que les surplus des deux groupes de clients sont maintenant :

$$S_{C1}^{ND} = \int_0^{Y_1^*} \left(p_1(Y_1) - p^*\right) \mathrm{d}Y_1 = \left[\frac{13}{6}Y_1 - \frac{Y_1^2}{2}\right]_0^{13/6} = 169/72$$

$$S_{C2}^{ND} = \int_0^{Y_2^*} \left(p_2(Y_2) - p^*\right) \mathrm{d}Y_2 = \left[\frac{1}{6} Y_2 - \frac{Y_2^2}{4}\right]_0^{1/3} = 1/36$$

Soit : $S_C^{ND} = 171/72$

- **Comparaison des deux cas**

(i) Le monopole a toujours intérêt à discriminer quand il le peut : $S_P^D = \frac{11}{4} > S_P^{ND} = \frac{25}{12}$

(ii) Le prix fixé sans discrimination est compris entre les prix fixés pour chaque groupe de clients quand il y a discrimination : $p_2^{*D} = \frac{9}{6} < p^{*ND} = \frac{11}{6} < p_1^{*D} = \frac{15}{6}$

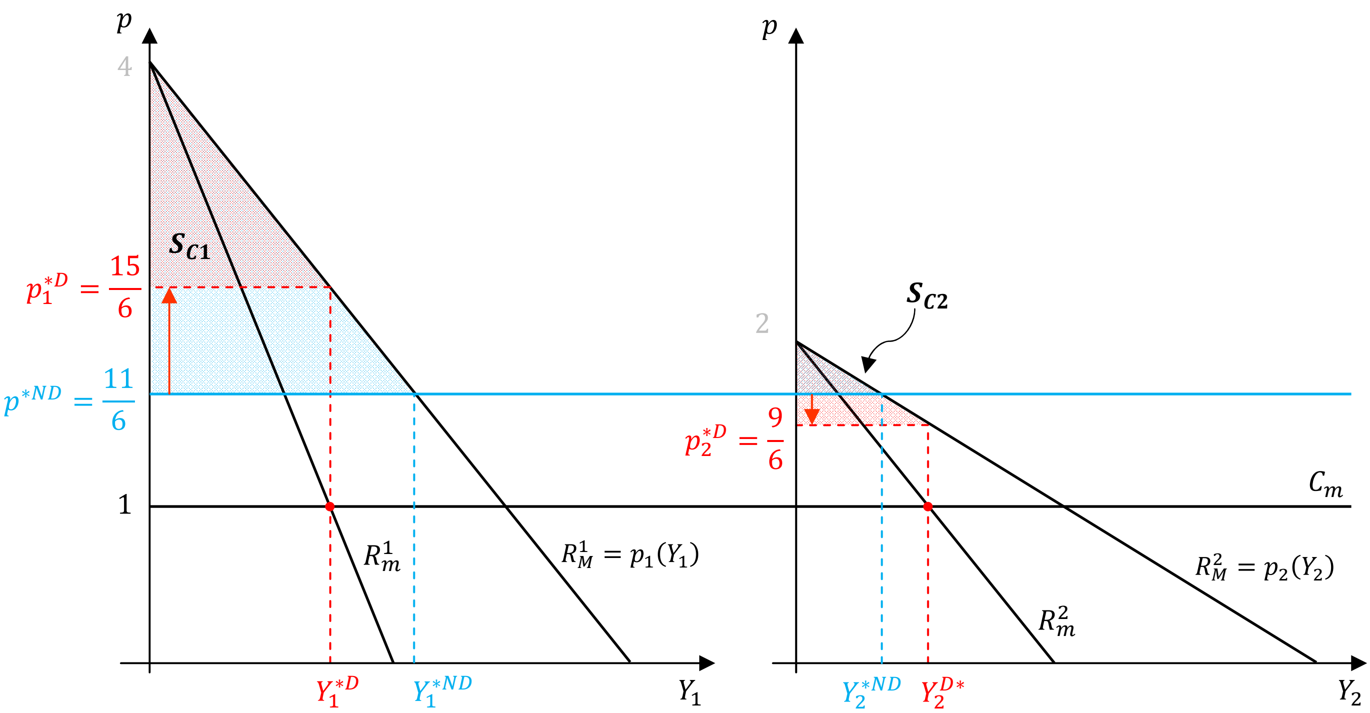
Le monopole discriminant augmente le prix des clients à la demande inélastique et baisse celui des clients à la demande élastique

(iii) Le surplus global des consommateurs diminue : $S_C^D = \frac{11}{8} < S_C^{ND} = \frac{171}{72}$

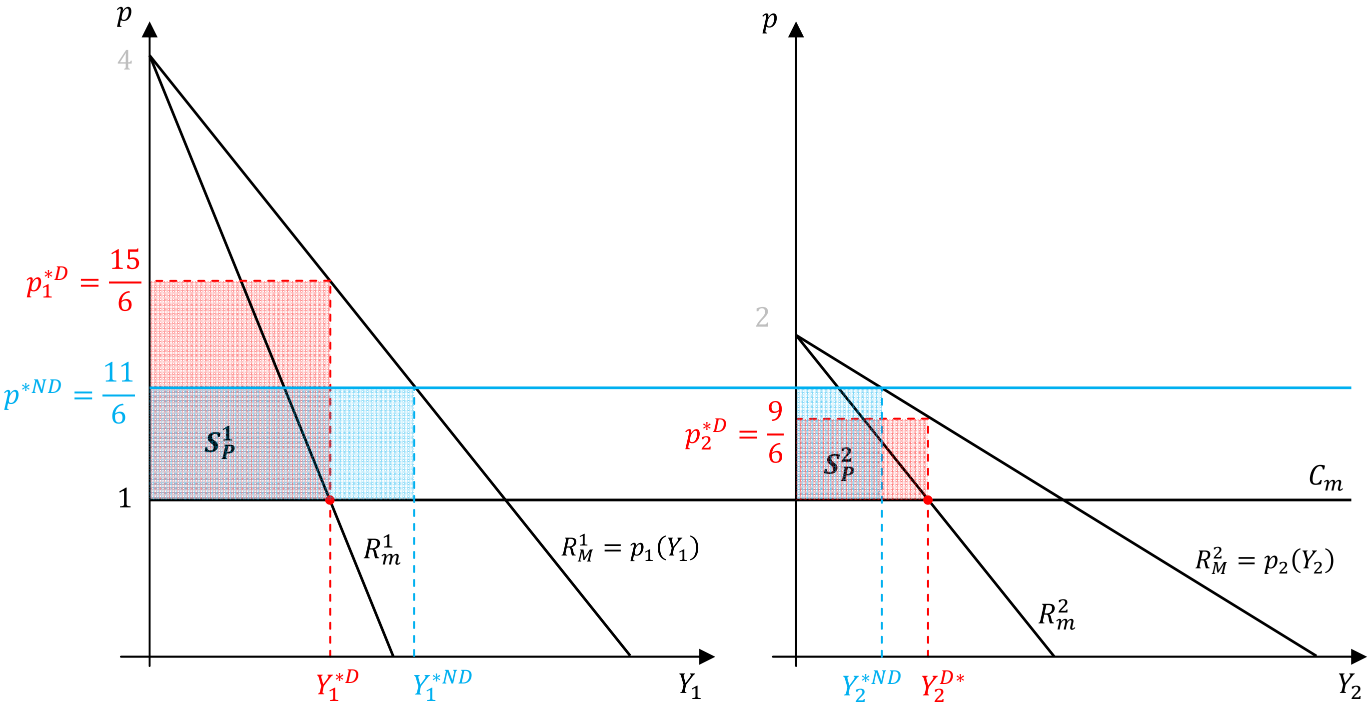
(iv) Le surplus des consommateurs les moins sensibles au prix diminue : $S_{C1}^D = \frac{9}{8} < S_{C1}^{ND} = \frac{169}{72}$

(v) Le surplus des consommateurs les plus sensibles au prix augmente : $S_{C2}^D = \frac{1}{4} > S_{C2}^{ND} = \frac{1}{36}$

- **Représentations graphiques**



- En bleu les surplus de chaque groupe de clients en l'absence de discrimination
- En rouge les mêmes surplus quand il y a discrimination : les clients du groupe 2 (dont la demande est la plus sensible au prix) gagnent, tandis que ceux du groupe 1(dont la demande est la moins sensible au prix) perdent



- En bleu les surplus réalisés par la firme sur chaque groupe de clients en l'absence de discrimination
- En rouge les mêmes surplus quand il y a discrimination

Chapitre 3. – Oligopole et duopole

Oligopole = petit nombre de vendeurs sur un marché

Situation intermédiaire entre la concurrence parfaite et le monopole

		Produit	
		Homogène	**Différencié**
Nombre de firmes	**Important**	Concurrence parfaite *(petits agriculteurs)*	Concurrence monopolistique *(restaurants, écoles privées, boulangeries)*
	Limité	Oligopole *(électricité, gaz, TV câble, opérateurs téléphonie)*	Oligopole différencié *(voitures, sodas, téléphones)*
	Deux	Duopole *(Airbus/Boeing)*	Duopole différencié *(Airbus/Boeing, Apple/Samsung)*
	Une	Monopole *(eau, SNCF)*	

- Contrairement à la concurrence parfaite et comme en monopole : chaque firme a la possibilité d'agir sur le prix de vente par les quantités qu'elle décide de mettre sur le marché

- Mais ce pouvoir de marché est plus faible qu'en monopole car la firme doit tenir compte à la fois de la demande des consommateurs ET des comportements des autres firmes

Caractéristique centrale de la situation d'oligopole : interactions stratégiques entre les firmes => situation de jeu

1. – La situation d'oligopole

1.1. – Modélisation

- **Demande**

On note $Y = D(p)$ – avec $D'(p) < 0$ – la quantité demandée au prix p

La fonction de demande inverse notée $p = D^{-1}(Y) = p(Y)$ – avec $p'(Y) < 0$ – indique le prix p permettant de vendre sur le marché une quantité totale Y

- **Offre**

n firmes indicées par $i = 1 \dots n$ produisant un bien homogène

Y_i est la production de la firme i et $C_i(Y_i)$ sa fonction de coûts

Chaque firme doit donc maximiser son profit définit par :

$$\Pi(Y_i \mid p) = pY_i - C_i(Y_i)$$

Sachant que :

(i) $p = p(Y) \qquad p'(Y) < 0$

(ii) $Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i = Y_i + Y_{-i}$

On est dans une situation de *jeu* : le profit de la firme i dépend non seulement de l'action de la firme i, mais également – via $p(Y)$ – des actions des autres firmes :

$$\Pi(Y_i \mid Y_{-i}) = p(Y_i + Y_{-i})Y_i - C_i(Y_i)$$

Il est donc important de préciser les règles du jeu :

- Ordre de jeu : jeu simultané / jeu dynamique. Dans quel ordre prend-on les décisions. Qui joue en premier ?
- Structure informationnelle : qui sait quoi et quand ?

- **Hypothèse**

Dans un premier temps on suppose que les firmes prennent leur décision *simultanément* en considérant les quantités mises sur le marché par les autres firmes comme des données sur lesquelles elles ne peuvent agir.

1.2. – Résolution

Le programme d'une firme i quelconque s'écrit :

$$\underset{\{Y_i\}}{\text{Max}} \quad \Pi(Y_i \mid p) = pY_i - C_i(Y_i)$$

$$s.t. \quad p = p(Y) \qquad p'(Y) < 0$$

$$Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i = Y_i + Y_{-i}$$

Il se réécrit identiquement :

$$\forall i = 1, \dots, n \qquad \underset{\{Y_i\}}{\text{Max}} \quad \Pi(Y_i \mid Y_{-i}) = \underbrace{p(Y_i + Y_{-i})Y_i}_{R(Y_i)} - C_i(Y_i)$$

Les conditions du 1er ordre sont alors :

$$\frac{\partial \Pi(Y_i \mid Y_{-i})}{\partial Y_i} = p'(Y)Y_i + p(Y) - C_i'(Y_i) = 0 \qquad \forall i = 1, \dots, n$$

En résolvant en $(Y_1, \dots, Y_n)$ ce système de n équations à n inconnues on tire les productions optimales de chaque firme : $(Y_1^*, \dots, Y_n^*)$

La production globale et le prix d'équilibre d'oligopole sont alors :

$$Y^* = \sum_{i=1}^{n} Y_i^* \ , \qquad p^* = p\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i^*\right)$$

1.3. – Remarques

- **Ecart en prix et coût marginal**

A l'équilibre d'oligopole on a :

$$p'(Y)Y_i + p(Y) = C_i^m(Y_i) \quad \forall i = 1, \dots, n$$

En sommant ces égalités pour $i = 1, \dots, n$ on a :

$$p'(Y)\sum_{i=1}^{n} Y_i + np(Y) = \sum_{i=1}^{n} C_i^m(Y_i)$$

En notant $C_m = \frac{\sum_{i=1}^{n} C_i^m(Y_i)}{n}$ le coût marginal moyen, on a alors :

$$p'(Y)Y + np(Y) = nC_m$$

Soit en reprenant le même mode de calcul qu'en situation de monopole (*cf.* Chapitre 2, § 1.3.1.)

$$p = \underbrace{\frac{\sigma_p^D}{1/n + \sigma_p^D}}_{\gamma_n} . C_m$$

où σ_p^D est l'élasticité de la demande par rapport au prix.

On remarque que :

- $\lim_{n \to 1} \gamma_n = \frac{\sigma_p^D}{1+\sigma_p^D}$ et on retrouve la même règle qu'en situation de monopole
- $\lim_{n \to +\infty} \gamma_n = 1$ et on retrouve la situation de concurrence parfaite ($p = C_m$)

- **Fonction de réaction d'une firme**

La résolution en Y_i de la condition du 1er ordre :

$$p'(Y_i + Y_{-i})Y_i + p(Y_i + Y_{-i}) = C_i'(Y_i)$$

Donne pour chaque firme sa *fonction de réaction* : $Y_i = \mathcal{R}_i(Y_{-i})$

C'est la façon dont la firme réagit par sa propre stratégie Y_i à la stratégie Y_{-i} des autres firmes.

On dit qu'il y a :

- Complémentarité stratégique si : $\frac{\partial \mathcal{R}_i}{\partial Y_{-i}} > 0$
- Substituabilité stratégique si : $\frac{\partial \mathcal{R}_i}{\partial Y_{-i}} < 0$

L'équilibre est simplement défini comme l'intersection des fonctions de réaction (équilibre de Nash):

$$(Y_1^*, \dots, Y_n^*) \quad t.q. \quad Y_i^* = \mathcal{R}_i(Y_{-i}^*) \ \ \forall i = 1, \dots, n$$

- **Condition du 2nd ordre**

$$\frac{\partial^2 \Pi(Y_i \mid Y_{-i})}{\partial {Y_i}^2} = p''(Y)Y_i + 2p'(Y) - C_i''(Y_i) < 0$$

Condition qui peut être vérifiée avec des rendements croissants

- **Complémentarité *vs* substituabilité stratégique**

En formant la différentielle totale de la condition du 1er ordre :

$$p'(Y_i + Y_{-i})Y_i + p(Y_i + Y_{-i}) - C_i'(Y_i) = 0$$

On obtient :

$$\big(p''(Y)Y_i + 2p'(Y) - C_i''(Y_i)\big)dY_i + \big(p''(Y)Y_i + p'(Y)\big)dY_{-i} = 0$$

$$i.e. \qquad \frac{\partial Y_i}{\partial Y_{-i}} = -\frac{p''(Y)Y_i + p'(Y)}{p''(Y)Y_i + 2p'(Y) - C_i''(Y_i)}$$

Dont le dénominateur est négatif compte tenu de la condition du 2nd ordre

$\frac{\partial Y_i}{\partial Y_{-i}}$ est donc du signe de $p''(Y)Y_i + p'(Y) < 0$ si la fonction de demande est linéaire => substituabilité stratégique

2. – Duopole : équilibre de Cournot

Situation : 2 firmes prenant leurs décisions *simultanément* en considérant la quantité mise sur le marché par l'autre firme comme une donnée

Les deux firmes, indicées par $i = 1,2$, sont caractérisées par une même fonction de coûts :

$$C_i(Y_i) = Y_i^2$$

La fonction de demande est définie par : $D(p) = \frac{a-p}{b} \quad \Rightarrow \quad p(Y) = a - bY$

2.1. – Prix et quantités d'équilibre

Le programme d'une firme i quelconque s'écrit :

$$\underset{\{Y_i\}}{\text{Max}} \quad \Pi(Y_i \mid p) = pY_i - C_i(Y_i)$$

$$s.t. \quad p = p(Y)$$

$$Y = Y_i + Y_{-i}$$

C'est-à-dire :

$$\underset{\{Y_i\}}{\text{Max}} \quad \Pi(Y_i \mid Y_{-i}) = \big(a - b(Y_i + Y_{-i})\big)Y_i - Y_i^2$$

La fonction de réaction de la firme i est alors définie par la condition du 1er ordre :

$$\frac{\partial \Pi(Y_i \mid Y_{-i})}{\partial Y_i} = -bY_i + a - b(Y_i + Y_{-i}) - 2Y_i = 0$$

$$i.e. \quad Y_i = \mathcal{R}_i(Y_{-i}) = \frac{a - bY_{-i}}{2(b+1)}$$

Il y a substituabilité stratégique ($\mathcal{R}_i{}'(Y_{-i}) < 0 \; \forall i$) et l'équilibre de Cournot est défini par l'intersection des fonctions de réaction, soit :

$$\begin{cases} Y_1 = \dfrac{a - bY_2}{2(b+1)} = \mathcal{R}_1(Y_2) \\ Y_2 = \dfrac{a - bY_1}{2(b+1)} = \mathcal{R}_2(Y_1) \end{cases}$$

En résolvant ce système on obtient :

$$Y_1^* = Y_2^* = \frac{a}{3b+2}$$

On a donc : $Y^* = Y_1^* + Y_2^* = \frac{2a}{3b+2} \quad \Leftrightarrow \quad p^* = a - bY^* = \frac{a(b+2)}{3b+2}$

2.2. – Surplus

Surplus de la firme 1 : $\quad S_{P1} = p^*Y_1^* - C_1(Y_1^*) = (b+1)\left(\frac{a}{3b+2}\right)^2$

Surplus de la firme 2 : $\quad S_{P2} = p^*Y_2^* - C_2(Y_2^*) = (b+1)\left(\frac{a}{3b+2}\right)^2$

Surplus du producteur : $\quad S_P = 2(b+1)\left(\frac{a}{3b+2}\right)^2$

Surplus du consommateur : $\quad S_C = \int_0^{Y^*} (p(Y) - p^*)\, \mathrm{d}Y = \left[aY - \frac{b}{2}Y^2\right]_0^{Y^*} - \int_0^{Y^*} p^* dY = \frac{2a^2b}{(3b+2)^2}$

Surplus global : $\quad S = S_P + S_C$

2.3. – Représentations graphiques

Dans le plan (Y_1, Y_2)

- **Courbes d'iso-profit**

La courbe d'iso-profit de niveau Π_0 de la firme 1 est définie par :

$$\Pi(Y_1 \mid Y_2) = \big(a - b(Y_1 + Y_2)\big)Y_1 - Y_1^2 = \Pi_0$$

Son équation dans le plan (Y_1, Y_2) est donc :

$$Y_2 = \frac{a}{b} - \frac{b+1}{b}Y_1 - \frac{\Pi_0}{bY_1} = \varphi(Y_1)$$

On note que $\varphi(\cdot)$ est strictement concave et admet un maximum, quand $\varphi'(Y_1) = 0$ soit en :

$$Y_1 = \sqrt{\frac{\Pi_0}{b+1}} \quad \text{et} \quad Y_2 = \frac{a}{b} - \frac{2}{b}\sqrt{\Pi_0(b+1)}$$

On a d'autre par $Y_2 = 0$ *ssi* :

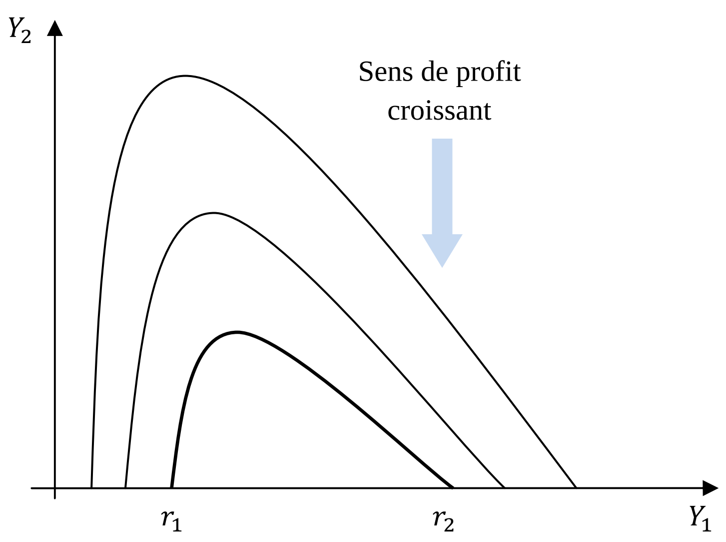
$$\underbrace{(b+1)}_{A} Y_1^2 \underbrace{-a}_{B} Y_1 + \underbrace{\Pi_0}_{C} = 0$$

Equation qui admet deux racines r_1 et r_2 vérifiant:

$$r_1 r_2 = \frac{C}{A} = \frac{\Pi_0}{b+1} > 0$$
$$r_1 + r_2 = \frac{-B}{A} = \frac{a}{b+1} > 0$$

On a donc : $r_1 > 0$ et $r_2 > 0$

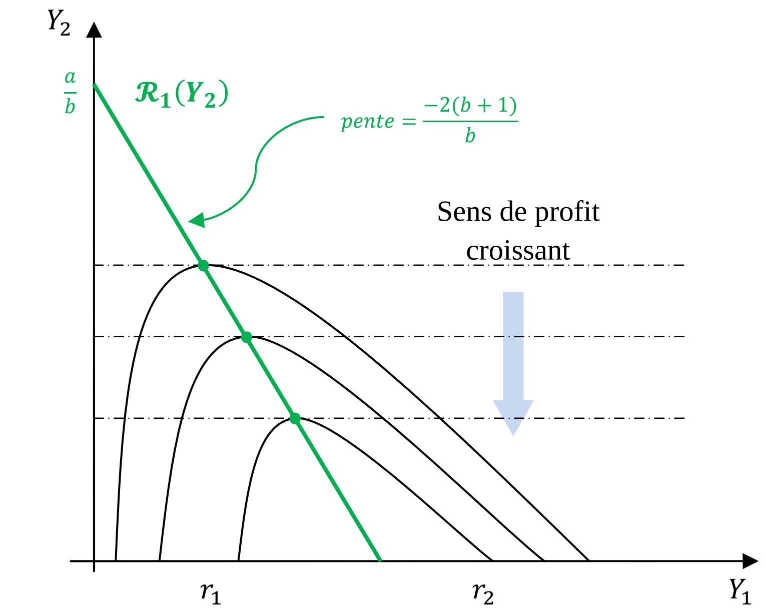
Les courbes d'iso-profit de la firme 1 sont alors figurées ci-dessous :



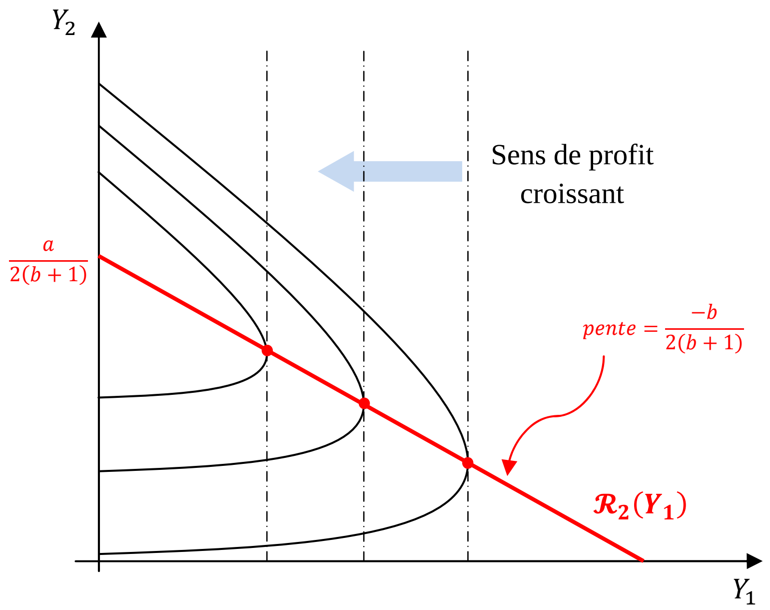
- **Fonctions de réactions**

La fonction de réaction de la firme 1 est définie par : $Y_1 = \frac{a-bY_2}{2(b+1)} = \mathcal{R}_1(Y_2)$

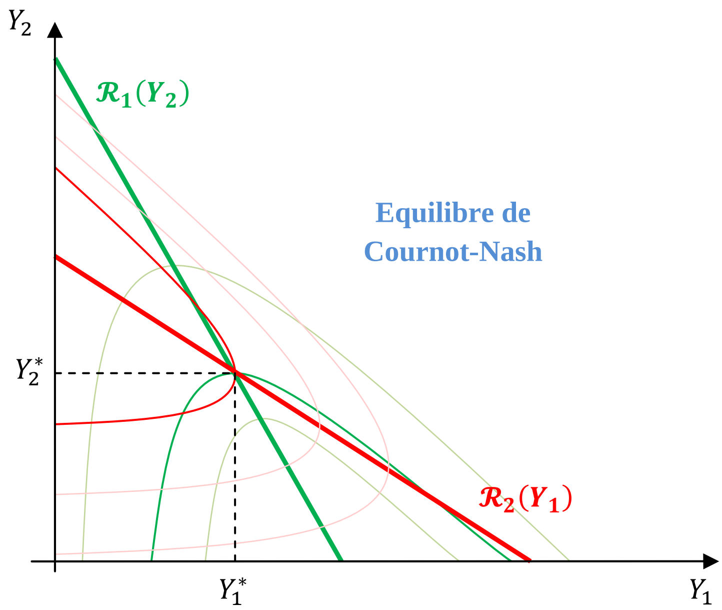
Son équation dans le plan (Y_1, Y_2) est donc : $Y_2 = \frac{a}{b} - \frac{2(b+1)}{b} Y_1$



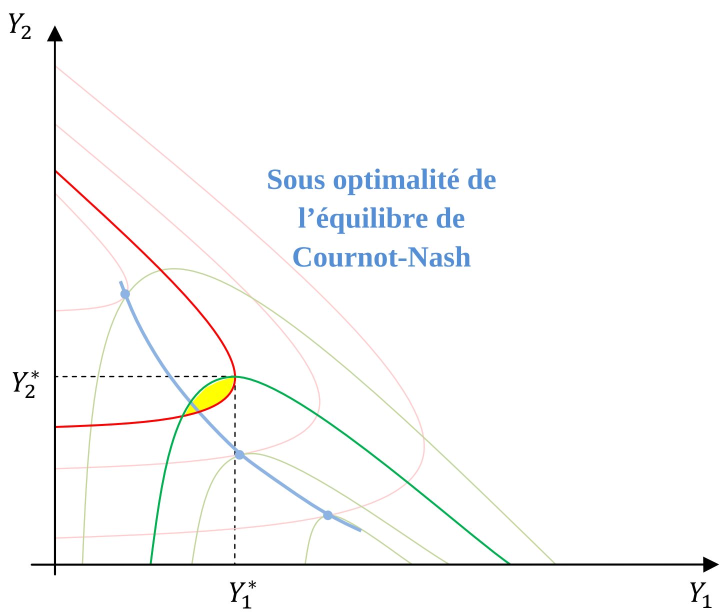
Symétriquement la fonction de réaction de la firme 2 est définie par : $Y_2 = \frac{a-bY_1}{2(b+1)} = \mathcal{R}_2(Y_1)$



- **Equilibre de duopole de Cournot-Nash**



Les courbes d'iso-profit ne sont pas tangentes à l'équilibre : l'allocation réalisée n'est pas optimale au sens de Pareto



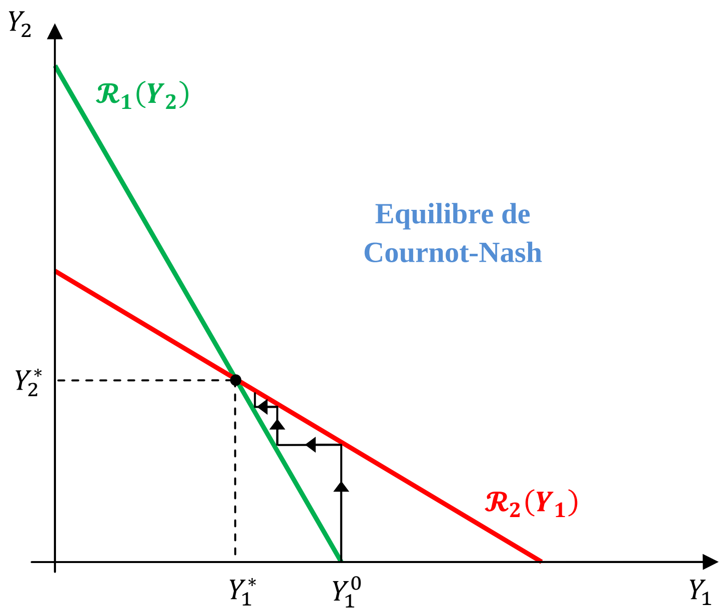
En bleu l'ensemble des allocations efficaces au sens de Pareto

En jaune l'ensemble des allocations mutuellement avantageuses

- **Stabilité de l'équilibre**

Aboutissement d'un processus dynamique d'ajustement des meilleures réponses.

A l'origine seule la firme 1 est présente sur le marché et produit Y_1^0 *etc.*



3. – Duopole : équilibre de Stackelberg

Situation : 2 firmes prenant leurs décisions *non simultanément*.

Jeu dynamique :

- la firme 1, le *leader*, prend sa décision de production avant l'autre
- la firme 2 (*follower*), réagit ensuite à la décision de la firme 1 en décidant à son tour combien produire

Structure informationnelle : le *leader* connait les caractéristiques du *follower*

Les deux firmes, indicées par $i = 1{,}2$, sont caractérisées par une même fonction de coûts :

$$C_i(Y_i) = Y_i^2$$

La fonction de demande est définie par : $D(p) = \frac{a-p}{b} \quad \Rightarrow \quad p(Y) = a - bY$

3.1. – Mode de résolution

Distinguer l'ordre de jeu … de l'ordre de résolution

Etape 1 : Détermination de la fonction de réaction $\mathcal{R}_2(Y_1)$ du *follower*

$$\underset{\{Y_2\}}{\text{Max}} \quad \Pi(Y_2 \mid p) = pY_2 - C_2(Y_2)$$

$$s.t. \quad p = p(Y)$$
$$Y = Y_1 + Y_2$$

La résolution de ce programme donne Y_2 en fonction de Y_1, soit $Y_2 = \mathcal{R}_2(Y_1)$

Etape 2 : Détermination de l'action du *leader i.e.* de son niveau de production Y_1^*

$$\underset{\{Y_1\}}{\text{Max}} \quad \Pi(Y_1 \mid p) = pY_1 - C_1(Y_1)$$

$$s.t. \quad p = p(Y)$$
$$Y = Y_1 + Y_2$$
$$Y_2 = \mathcal{R}_2(Y_1)$$

La résolution de ce programme donne Y_1^*

Etape 3 : Détermination de l'action du *follower i.e.* de son niveau de production Y_2^*

$$Y_2^* = \mathcal{R}_2(Y_1^*)$$

Etape 4 : Détermination du niveau de production d'équilibre et du prix d'équilibre

$$Y^* = Y_1^* + Y_2^* \quad \Leftrightarrow \quad p^* = p(Y^*)$$

3.2. – Prix et quantités d'équilibre

Etape 1 : Fonction de réaction $\mathcal{R}_2(Y_1)$ du *follower*

$$\underset{\{Y_2\}}{\text{Max}} \quad \Pi(Y_2 \mid p) = pY_2 - {Y_2}^2$$

$$s.t. \quad p = a - bY$$
$$Y = Y_1 + Y_2$$

C'est-à-dire :

$$\underset{\{Y_2\}}{\text{Max}} \quad \Pi(Y_2 \mid Y_1) = \big(a - b(Y_1 + Y_2)\big)Y_2 - Y_2^2$$

Dont la résolution donne Y_2 en fonction de Y_1 (*cf.* 2.1.)

$$Y_2 = \frac{a - bY_1}{2(b+1)} = \mathcal{R}_2(Y_1)$$

Etape 2 : Action du *leader* : Y_1^*

$$\underset{\{Y_1\}}{\text{Max}} \quad \Pi(Y_1 \mid p) = pY_1 - {Y_1}^2$$

$$s.t. \quad p = p(Y) = a - bY$$
$$Y = Y_1 + Y_2$$

$$Y_2 = \mathcal{R}_2(Y_1) = \frac{a - bY_1}{2(b+1)}$$

Soit :

$$\underset{\{Y_1\}}{\text{Max}} \quad \Pi(Y_1) = \left(a - b\left(\underbrace{Y_1 + \left(\frac{a - bY_1}{2(b+1)}\right)}_{Y}\right)\right)Y_1 - {Y_1}^2$$

La condition du 1er ordre est :

$$\Pi'(Y_1) = -b\big(1 + \mathcal{R}_2'(Y_1)\big)Y_1 + p\big(Y_1 + \mathcal{R}_2(Y_1)\big) - 2Y_1 = 0$$

dont la résolution donne directement la quantité produite par le *leader* :

$$Y_1^* = \frac{a(b+2)}{b(2b+8)+4}$$

Etape 3 : Action du *follower* : Y_2^*

$$Y_2^* = \mathcal{R}_2(Y_1^*) = \frac{a - bY_1^*}{2(b+1)}$$

En posant, pour simplifier, $a = b = 1$, on obtient alors :

$$Y_1^* = \frac{12}{56}\,, \qquad Y_2^* = \frac{11}{56}$$

Et donc : $\quad Y^* = Y_1^* + Y_2^* = \frac{23}{56} \quad \Rightarrow \quad p^* = 1 - Y^* = \frac{33}{56}$

La firme *leader* produit plus que le *follower* : elle est en mesure d'évincer partiellement le *follower* du marché

3.3. – Surplus

La firme *leader* obtient un profit supérieur à celui du *follower*

Surplus de la firme 1 (*leader*) : $\quad S_{P1} = p^*Y_1^* - C_1(Y_1^*) = 9/112$

Surplus de la firme 2 (*follower*) : $\quad S_{P2} = p^*Y_2^* - C_2(Y_2^*) = 53/784 < S_{P1}$

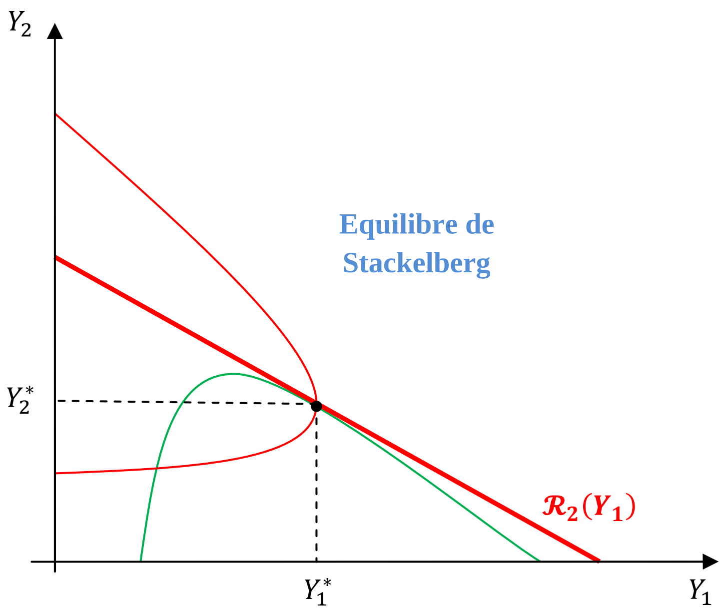
Surplus du producteur : $\quad S_P = 29/196$

Surplus du consommateur : $\quad S_C = \int_0^{Y^*} (p(Y) - p^*)\,\mathrm{d}Y = 529/6272$

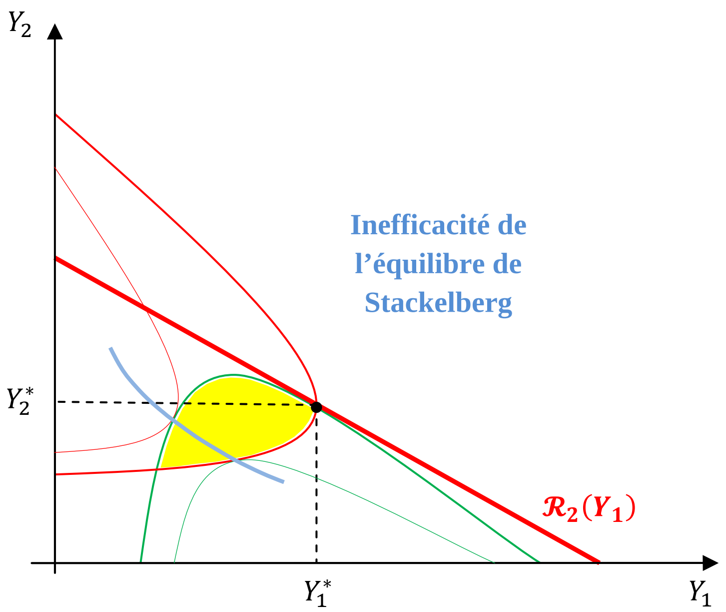
Surplus global : $\quad S = S_P + S_C = 1457/6272$

3.4. –Représentations graphiques

La firme 1 *leader* se situe sur la plus basse de ses courbes d'iso profit en prenant non plus la production de la firme 2 comme une donnée… mais la fonction de réaction de la firme 2



Comme précédemment l'allocation n'est pas efficace au sens de Pareto.

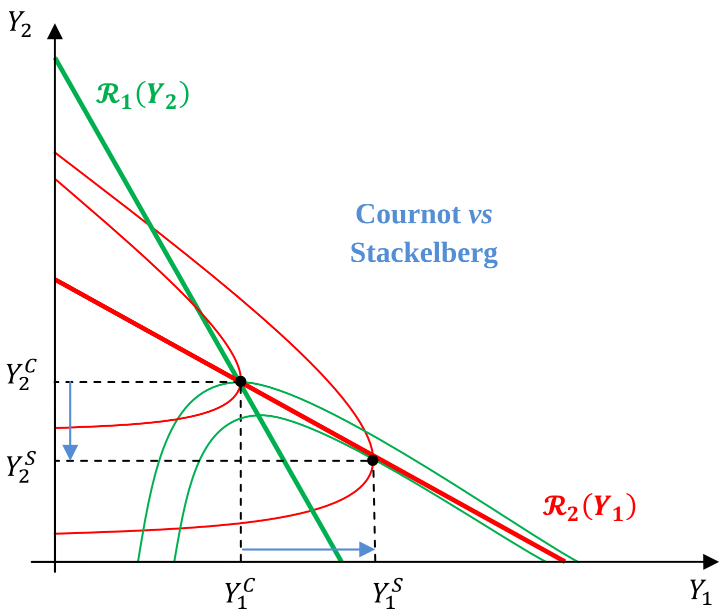


En bleu l'ensemble des allocations efficaces au sens de Pareto

En jaune l'ensemble des allocations mutuellement avantageuses

3.5. – Comparaison Cournot *vs* Stackelberg

En bleu le passage de Cournot à Stackelberg



La production du *leader* augmente, celle du *follower* baisse

Le *leader* bascule sur une courbe d'iso-profit plus basse correspondant à un profit plus élevé

Le *follower* bascule sur une nouvelle courbe d'iso-profit correspondant à un profit plus faible

	Y_1^*	Y_2^*	Y^*	p^*	S_{P1}	S_{P2}	S_P	S_C	S
Cournot	1/5	1/5	2/5	3/5	2/25	2/25	4/25	2/25	6/25
Stackelberg	12/56	11/56	23/56	33/56	63/784	53/784	29/196	529/6272	1457/6272

- Principaux résultats

Le passage de Cournot à Stackelberg donne un avantage au *leader i.e.* à celui qui joue en premier

- La firme *leader* produit plus qu'en Cournot car elle est en mesure d'évincer partiellement le *follower* du marché (qui produit moins qu'en Cournot)
- Cela lui permet d'obtenir, au détriment du *follower*, un profit plus important
- La production d'équilibre augmente et le prix d'équilibre baisse => le surplus du consommateur augmente
- On se rapproche en Stackelberg de la production de concurrence parfaite
- Le surplus des producteurs diminue
- Le surplus global augmente
- Il y a des gagnants, la firme *leader* et les consommateurs, et un perdant : la *firme* follower

4. – Duopole, coopération et cartels

On change la nature du comportement des firmes en supposant qu'elles sont capables de coopérer : passage d'un jeu non coopératif à un jeu coopératif.

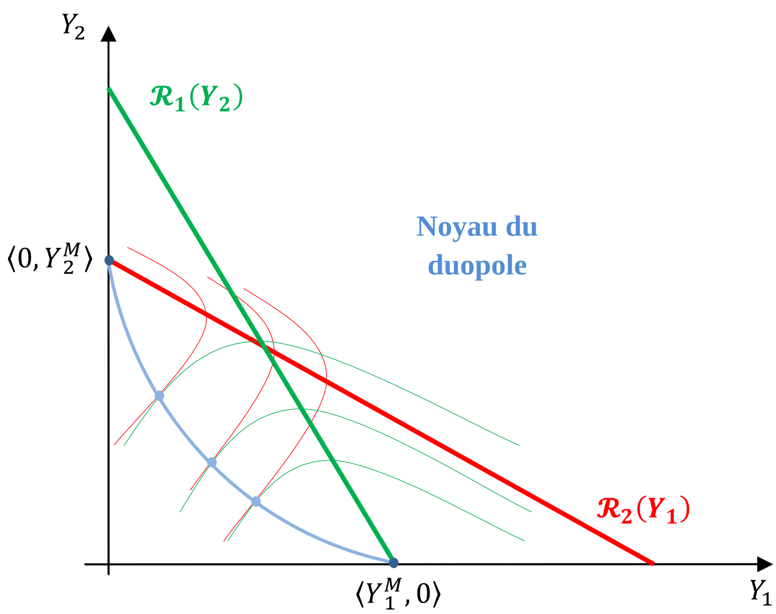
4.1. – Contrat optimal : noyau du duopole

Dans ce cas les firmes forment un cartel : elles maximisent la « somme des profits » et négocient entre elles un contrat qui précise leurs productions individuelles $\langle Y_1, Y_2 \rangle$ et la règle de partage *ex post* du profit total

Tout contrat optimal acceptable par les deux parties doit nécessairement :

- Être une situation efficace au sens de Pareto
- Assurer un profit positif aux deux firmes

L'ensemble de tels contrats est le *noyau* du duopole



- En $\langle Y_1^M, 0 \rangle$ la firme 1 est la seule à produire : elle est en situation de monopole, met sur le marché sa « quantité de monopole »
- En $\langle 0, Y_2^M \rangle$ c'est la firme 2 qui est seule et produit sa « quantité de monopole »

4.2. – Résolution du programme du cartel

Le programme permettant de déterminer les productions optimales de chaque firme s'écrit :

$$\underset{\{Y_1,Y_2\}}{\text{Max}} \quad \Pi(Y_1, Y_2 \,|\, p) = pY - \sum_{i=1}^{2} C_i(Y_i)$$

$$s.t. \quad p = p(Y)$$

$$Y = Y_1 + Y_2$$

Soit :

$$\underset{\{Y_1,Y_2\}}{\text{Max}} \quad \Pi(Y_1, Y_2) = \underbrace{p(Y_1 + Y_2)(Y_1 + Y_2)}_{R(Y)} - C_1(Y_1) - C_2(Y_2)$$

Et les conditions du 1[er] ordre sont :

$$\begin{cases} \Pi_{Y_1}(Y_1, Y_2) = p'(Y)Y + p(Y) - C_1'(Y_1) = 0 \\ \Pi_{Y_2}(Y_1, Y_2) = \underbrace{p'(Y)Y + p(Y)}_{R^m(Y)} - C_2'(Y_2) = 0 \end{cases}$$

Dont la résolution en (Y_1, Y_2) donne les productions optimales de chaque établissement et, *in fine*, la production totale $Y^* = Y_1^* + Y_2^*$ et le prix d'équilibre : $p^* = p(Y^*)$

On a donc en situation coopérative de cartel :

$$R^m = C_1^m = C_2^m$$

Le cartel égalise les coûts marginaux de chaque établissement et la recette marginale du cartel.

4.3. – Productions optimales et prix d'équilibre

Les deux firmes, indicées par $i = 1{,}2$, sont toujours caractérisées par une même fonction de coûts :

$$C_i(Y_i) = Y_i^2$$

Et la fonction de demande est définie par : $D(p) = \frac{a-p}{b} \quad \Rightarrow \quad p(Y) = a - bY$

Dans ce cas les conditions du 1[er] ordre s'écrivent :

$$\begin{cases} R^m = C_1^m \quad \Leftrightarrow \quad a - 2b(Y_1 + Y_2) = 2Y_1 \\ R^m = C_2^m \quad \Leftrightarrow \quad a - 2b(Y_1 + Y_2) = 2Y_2 \end{cases}$$

En résolvant alors ce système en Y_1 et Y_2 – en notant que comme le problème est symétrique on a $Y_1 = Y_2$ – on obtient :

$$Y_1^* = Y_2^* = \frac{a}{2 + 4b}$$

Dont on déduit les quantités d'équilibre et le prix d'équilibre :

$$Y^* = Y_1^* + Y_2^* = \frac{a}{1 + 2b} \quad \Rightarrow \quad p^* = a - bY^* = \frac{a(1+b)}{1+2b}$$

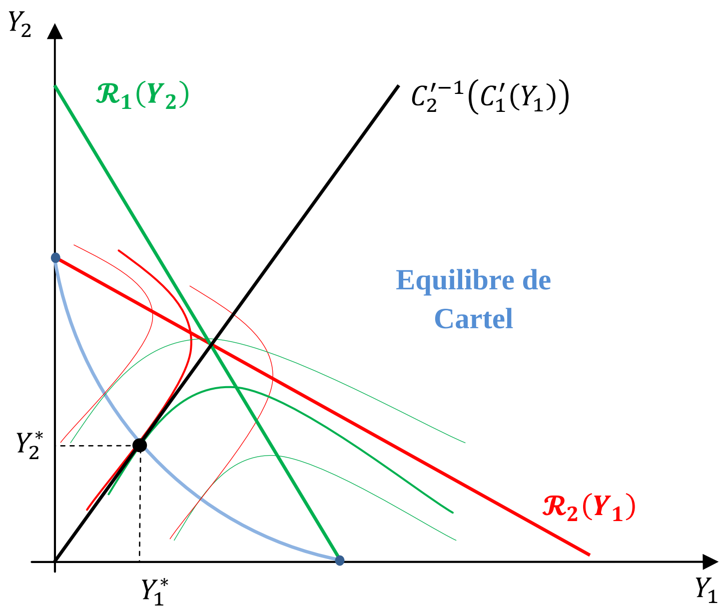
4.4. – Représentations graphiques

Le cartel égalisant les coûts marginaux de production dans chaque établissement on a :

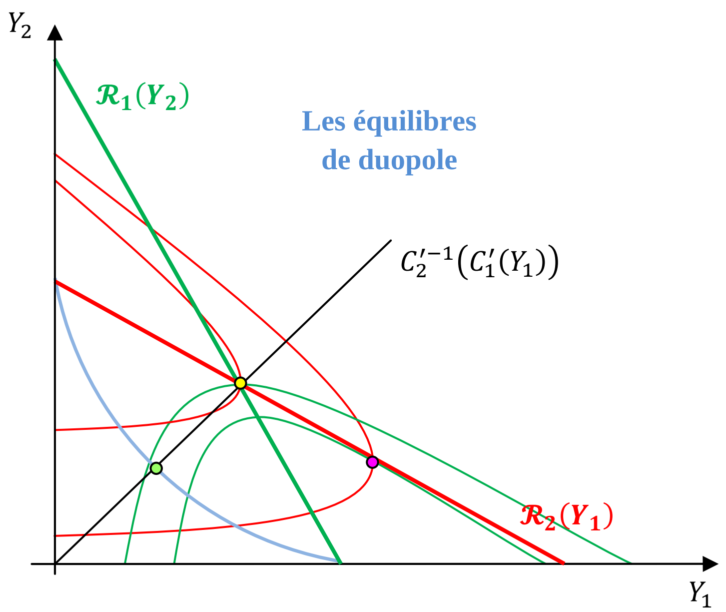
$$C_1'(Y_1) = C_2'(Y_2) \quad i.e. \quad Y_2 = C_2'^{-1}\big(C_1'(Y_1)\big)$$

Ce qui s'écrit dans notre exemple : $Y_2 = Y_1$

On peut alors représenter graphiquement l'équilibre de Cartel et le comparer avec les autres équilibres de duopole.



Ci-dessous les équilibre de Cournot, de Stakelberg et de Cartel



4.5. – Surplus

On pose comme précédemment pour simplifier $a = b = 1$, soit : $Y_1^* = Y_2^* = \frac{1}{6}$, $Y^* = \frac{1}{3}$ et $p^* = \frac{2}{3}$

- Surplus de la firme 1 : $S_{P1} = p^* Y_1^* - C_1(Y_1^*) = 1/12$
- Surplus de la firme 2 : $S_{P2} = p^* Y_2^* - C_2(Y_2^*) = 1/12$
- Surplus du producteur : $S_P = 1/6$
- Surplus du consommateur : $S_C = \int_0^{Y^*} (p(Y) - p^*)\, dY = \left[Y - \frac{1}{2}Y^2\right]_0^{1/3} - \int_0^{Y^*} p^* dY = 1/18$
- Surplus global : $S = S_P + S_C = 2/9$

5. – Comparaison avec la concurrence parfaite

En concurrence parfaite on a : $C_i^m = p\ \forall i$

L'offre de chaque firme est alors définie par : $2Y_i = p$ $i.e.$ $Y_i^S = \frac{p}{2}$ $i = 1,2$

L'offre agrégée est donc : $Y^S = \sum_{i=1}^{2} Y_i^S = p$

Et l'équilibre est caractérisé par :

$$Y^S = Y^D \quad \Leftrightarrow \quad p = \frac{a - p}{b} \quad i.e. \quad p^* = \frac{a}{1 + b}$$

A ce prix la quantité échangée sur le marché est $Y^* = \frac{a}{1+b}$ et $Y_1^* = Y_2^* = \frac{a}{2(1+b)}$

On peut alors calculer les surplus en posant toujours pour simplifier $a = b = 1$, soit :

$$Y_1^* = Y_2^* = \frac{1}{4}, \qquad Y^* = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad p^* = \frac{1}{2}$$

- Surplus de la firme 1 : $S_{P1} = p^* Y_1^* - C_1(Y_1^*) = 1/16$
- Surplus de la firme 2 : $S_{P2} = p^* Y_2^* - C_2(Y_2^*) = 1/16$
- Surplus du producteur : $S_P = 1/8$
- Surplus du consommateur : $S_C = \int_0^{Y^*} (p(Y) - p^*)\, dY = \left[Y - \frac{1}{2}Y^2\right]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} p^* dY = 1/8$
- Surplus global : $S = S_P + S_C = 1/4$

	Y_1^*	Y_2^*	Y^*	p^*	S_{P1}	S_{P2}	S_P	S_C	S
Concurrence	25,00	25	50	50	6,25	6,25	12,5	12,5	25
Cournot	20	20	40	60	8	8	16	8	24
Stackelberg	21,43	19,64	41,07	58,93	8,04	6,76	14,80	8,43	23,23
Cartel	16,67	16,67	33,33	66,66	8,33	8,33	16,67	5,56	22,22

6. – Duopole et théorie des jeux

6.1. – Equilibre, optimum, coordination et coopération

2 firmes $F1$ et $F2$ - les joueurs - en situation de duopole sur un marché

$A_{F1} = A_{F2} = \{$ B = "production faible", H = "production forte" $\}$

Matrice des profits associés aux décisions des joueurs (matrice des paiements) :

Firme 2 / Firme 1	Production faible (B)	Production forte (H)
Production faible (B)	3 3	1 4
Production forte (H)	4 1	2 2

Hypothèse : les 2 firmes jouent en même temps de façon <u>non-coopérative</u>

- Ensemble des stratégies des joueurs

$\mathbb{S}_{F1} = \{ S_{F1}^1 = \text{production faible},\ S_{F1}^2 = \text{production forte}\}$

$\mathbb{S}_{F2} = \{ S_{F2}^1 = \text{production faible},\ S_{F2}^2 = \text{production forte}\}$

- Forme normale du jeu

Firme 2 / Firme 1	$S_{F2}^1 = B$	$S_{F2}^2 = H$
$S_{F1}^1 = B$	**3** **3**	1 $\underline{4}$
$S_{F1}^2 = H$	$\underline{4}$ 1	$\boxed{\underline{2} \quad \underline{2}}$

Equilibre en stratégies dominantes : il existe une façon naturelle pour les joueurs de jouer. L'issue du jeu est :

$$\boldsymbol{E_1} = \{ S_{F1}^2 = \text{production forte},\ S_{F2}^2 = \text{production forte}\}$$

L'équilibre n'est pas un optimum de Pareto : les 2 firmes seraient mieux si toutes les deux jouaient B

Problème : il n'existe pas de manière crédible pour les firmes de s'engager mutuellement à jouer B.

Problème de coordination (*dilemme du prisonnier*) : en (3,3) les firmes ne sont pas sur leurs fonctions de réaction => les deux firmes ont intérêt à dévier et à changer de stratégie.

Nota : si les entreprises coopéraient (<u>jeu coopératif</u>) elles baisseraient volontairement leur production pour maximiser la somme des profits : on obtiendrait alors la solution coopérative de cartel **(3,3)**

6.2. – Jeu dynamique

2 firmes $F1$ et $F2$ - les joueurs - en situation de duopole sur un marché

$A_{F1} = A_{F2} = \{\ \mathrm{B} = \text{"production faible"},\quad \mathrm{H} = \text{"production forte"}\ \}$

Matrice des profits associés aux décisions des joueurs (matrice des paiements) :

Firme 2 / Firme 1	Production faible (*B*)	Production forte (*H*)
Production faible (*B*)	5 2	3 3
Production forte (*H*)	4 1	1 0

6.2.1. – Résolution du jeu simultané

Hypothèse : les 2 firmes jouent en même temps

- Ensemble des stratégies des joueurs

  $\mathbb{S}_{F1} = \{\, S_{F1}^1 = B,\ S_{F1}^2 = H\}$

  $\mathbb{S}_{F2} = \{\, S_{F2}^1 = B,\ S_{F2}^2 = H\}$

- Forme normale du jeu

Firme 2 / Firme 1	$S_{F2}^1 = B$	$S_{F2}^2 = H$
$S_{F1}^1 = B$	**5 2**	3 3
$S_{F1}^2 = H$	4 1	1 0

II existe une façon naturelle de jouer le jeu

$F1$ dispose d'une stratégie dominante $S_{F1}^1 = B$

$F2$ ne dispose pas d'une stratégie dominante mais sait que $F1$ utilisera sa stratégie dominante.

Le seul équilibre du jeu est donc constitué de la stratégie dominante de $F1$ et de la meilleure réponse de $F2$ à cette stratégie dominante, soit :

$$E = \{\, S_{F1}^1 = \mathrm{B},\ S_{F2}^2 = \mathrm{H}\}$$

C'est un équilibre de Nash = situation dans laquelle aucun joueur n'a intérêt unilatéralement à changer de stratégie (les 2 firmes sont sur leur fonction de réaction)

On remarque que l'équilibre du jeu non-coopératif est différent de la solution coopérative (en vert)

6.2.2. – Résolution du jeu dynamique

- **Hypothèses**
  - la firme 1 joue en premier : $F1$ est le *leader* et $F2$ le *follower*
  - avant de jouer, la firme 2 observe l'action de la firme 1

- Ensemble de stratégies des joueurs

$\mathbb{S}_{F1} = \{\, S_{F1}^1 = \text{B},\ S_{F1}^2 = \text{H}\}$

$$\mathbb{S}_{F2} = \begin{Bmatrix} S_{F2}^1 = [B\ si\ A_{F1} = B, Bsi\ A_{F1} = H],\ S_{F2}^2 = [H\ si\ A_{F1} = B, Hsi\ A_{F1} = H]\,, \\ S_{F2}^3 = [B\ si\ A_{F1} = B, Hsi\ A_{F1} = H],\ S_{F2}^4 = [H\ si\ A_{F1} = B, Bsi\ A_{F1} = H] \end{Bmatrix}$$

$$= \{S_{F2}^1 = [Toujours\ B],\ S_{F2}^2 = [Toujours\ H]\,, S_{F2}^3 = [Comme\ F1],\ S_{F2}^4 = [Contraire\ de\ F1]\}$$

- Forme normale du jeu

Firme 2 / Firme 1	S_{F2}^1 $[Toujours\ B]$	S_{F2}^2 $[Toujours\ H]$	S_{F2}^3 $[Comme\ F1]$	S_{F2}^4 $[Contraire\ de\ F1]$
$S_{F1}^1 = B$	$\underline{5}$ 2	$\underline{3}$ $\underline{3}$	$\underline{5}$ 2	3 $\underline{3}$
$S_{F1}^2 = H$	4 $\underline{1}$	1 0	1 0	$\underline{4}$ $\underline{1}$

2 équilibres de Nash

- $E_1 = \{\, S_{F1}^1 = B,\ S_{F2}^2 = [Toujours\ H]\} \quad \Rightarrow A_{F1} = B, A_{F2} = H \ \Rightarrow\ P = (3,3)$
- $E_2 = \{\, S_{F1}^2 = H,\ S_{F2}^4 = [Contraire\ de\ F1]\} \Rightarrow A_{F1} = H, A_{F2} = B \ \Rightarrow\ P = (4,1)$

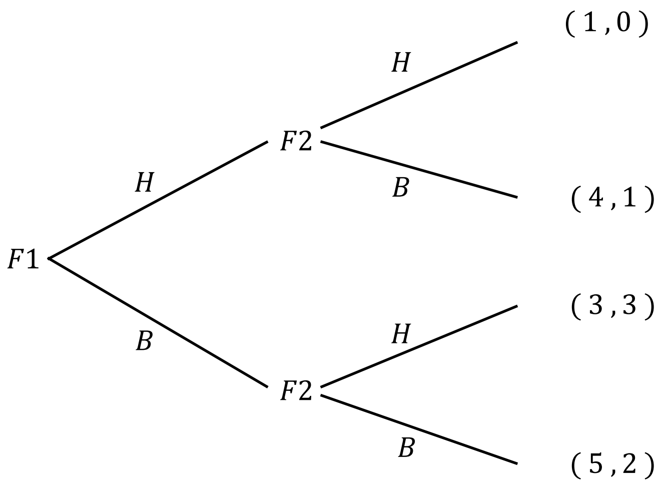
Question : peut-on trier parmi les équilibres de Nash pour en éliminer certains ?

Réponse : Oui en utilisant le concept de *menace non crédible*

Définition : On appelle équilibre parfait d'un jeu tout équilibre de Nash n'incluant pas de stratégie reposant sur une menace non crédible

- Tous les équilibres parfaits sont des équilibres de Nash
- Tous les équilibres de Nash ne sont pas parfaits

- La représentation du jeu sous forme extensive permet d'identifier les menaces non crédibles



S^2_{F2} $= [Toujours\ H]$ repose sur une menace non crédible :

- $F2$ joue H lorsque $F1$ a joué B est crédible
- $F2$ joue H lorsque $F1$ a joué H est une menace non crédible

L'équilibre de Nash $E_1 = \{\, S^1_{F1} = B,\ S^2_{F2} = [Toujours\ H]\}$ n'est donc pas un équilibre parfait du jeu

$S^4_{F2} = [Contraire\ de\ F1]$ ne repose sur aucune menace non crédible

L'équilibre de Nash $E_2 = \{\, S^2_{F1} = H,\ S^4_{F2} = [Contraire\ de\ F1]\}$ est donc un équilibre parfait du jeu

Firme 2 / Firme 1	S^1_{F2} $[Toujours\ B]$	S^2_{F2} $[Toujours\ H]$	S^3_{F2} $[Comme\ F1]$	S^4_{F2} $[Contraire\ de\ F1]$
$S^1_{F1} = B$	$\underline{5}$ 2	$\cancel{\underline{3}\quad\underline{3}}$	$\underline{5}$ 2	3 $\underline{3}$
$S^2_{F1} = H$	4 $\underline{1}$	1 0	1 0	$\boxed{\underline{4}\quad\underline{1}}$

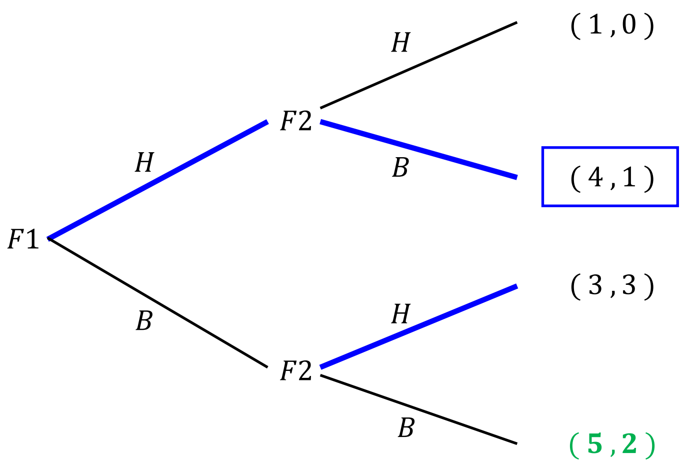
2 équilibres de Nash…mais un seul équilibre parfait du jeu dynamique qui correspond à l'issue du jeu

Jouer en premier donne un avantage.

Le *leader* « impose sa loi » au *follower* (équilibre de Stackelberg): parce qu'elle joue en premier la firme 1 comprend qu'elle peut prendre une part de marché plus grande et réaliser des profits plus importants :

➡ Une fois que la firme 1 a mis une quantité importante sur le marché, la firme 2 ne peut que s'adapter en diminuant sa production pour éviter une trop forte baisse du prix de vente.

- Résolution sur la forme extensive par induction *backward*



6.2.3. – Résolution du jeu coopératif et cartel

Changement de règle du jeu : les firmes coopèrent pour maximiser les profits joints

Firme 2 / Firme 1	$S_{F2}^1 = B$	$S_{F2}^2 = H$
$S_{F1}^1 = B$	$\underline{5}$ 2	$\underline{3}$ $\underline{3}$
$S_{F1}^2 = H$	4 $\underline{1}$	1 0

En rouge l'équilibre de Nash du jeu statique non-coopératif

En vert la solution du jeu coopératif (situation de Cartel)

6.3. – Un jeu simple de Cournot, Stackelberg et Cartel

2 firmes identiques $F1$ et $F2$ en situation de duopole sur un marché

$A_{F1} = A_{F2} = \{\ B =$ production faible", M=production moyenne", $H =$ "production forte" }

Matrice des profits associés aux décisions des firmes (matrice des paiements) :

Firme 2 / Firme 1	Production faible (B)	Production moyenne (M)	Production forte (H)
Production faible (B)	7 7	5 8	2 7
Production moyenne (M)	8 5	6 6	1 3
Production forte (H)	7 2	3 1	0 0

6.3.1. – Jeu statique non coopératif : équilibre de Cournot

- Ensemble des stratégies des joueurs

  $\mathbb{S}_{F1} = \{\, S_{F1}^1 = B,\ S_{F1}^2 = M,\ S_{F1}^3 = H\}$

  $\mathbb{S}_{F2} = \{\, S_{F2}^1 = B,\ S_{F2}^2 = M,\ S_{F2}^3 = H\}$

- Forme normale du jeu

Firme 2 / Firme 1	$S_{F2}^1 = \mathrm{B}$	$S_{F2}^2 = \mathrm{M}$	$S_{F2}^3 = \mathrm{H}$
$S_{F1}^1 = \mathrm{B}$	7 7	5 $\underline{8}$	$\underline{2}$ 7
$S_{F1}^2 = \mathrm{M}$	$\underline{8}$ 5	$\underline{6}$ $\underline{6}$	1 3
$S_{F1}^3 = \mathrm{H}$	7 $\underline{2}$	3 1	0 0

Un seul équilibre de Nash qui est la solution non coopérative du jeu : équilibre de Cournot (en rouge)

On notera que l'allocation est inefficace au sens de Pareto puisque les 2 firmes seraient mieux en (7,7)

6.3.2. – Jeu statique coopératif : équilibre de Cartel

Maximisation des profits joints

Firme 2 / Firme 1	$S_{F2}^1 = B$	$S_{F2}^2 = M$	$S_{F2}^3 = H$
$S_{F1}^1 = B$	7 7	5 8	2 7
$S_{F1}^2 = M$	8 5	6 6	1 3
$S_{F1}^3 = H$	7 2	3 1	0 0

Equilibre de cartel (en vert) : solution coopérative du jeu

Les firmes diminuent leur production par rapport à la situation de Cournot

6.3.3. – Jeu dynamique non- coopératif : équilibre de Stackelberg

- Hypothèses
  - la firme 1 joue en premier => $F1$ est le *leader* et $F2$ le *follower*
  - avant de jouer, la firme 2 observe l'action de la firme 1
- Ensemble des stratégies des joueurs

  $\mathbb{S}_{F1} = \{ S_{F1}^1 = B,\ S_{F1}^2 = M,\ S_{F1}^3 = H\}$

  Pour la firme 2 une stratégie s'écrit sous la forme générale:

  $$[X \text{ si } A_{F1} = B,\ X \text{ si } A_{F1} = M,\ X \text{ si } A_{F1} = H] \quad \text{avec} \quad X = B \text{ ou } M \text{ ou } H$$

  Pour simplifier la présentation on notera, par exemple, BHM la stratégie :

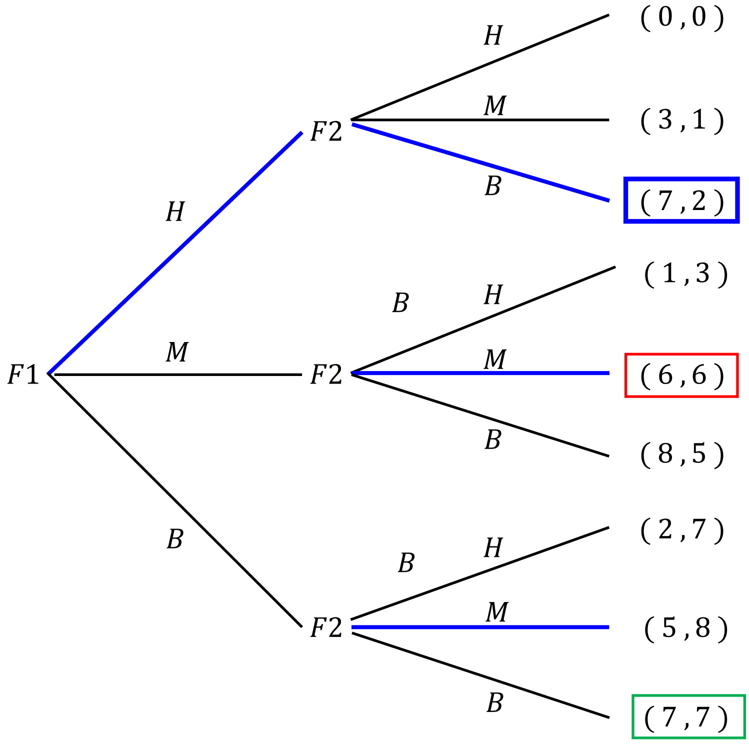
  $$[B \text{ si } A_{F1} = B,\ H \text{ si } A_{F1} = M,\ M \text{ si } A_{F1} = H]$$

  La firme 2 dispose alors de 27 stratégies :

$$\mathbb{S}_{F2} = \begin{Bmatrix} S_{F2}^1 = BBB,\ S_{F2}^2 = BBM,\ S_{F2}^3 = BBH,\ S_{F2}^4 = BMB,\ S_{F2}^5 = BMM,\ S_{F2}^6 = BMH,\ S_{F2}^7 = BHB,\ S_{F2}^8 = BHM,\ S_{F2}^9 = BHH, \\ S_{F2}^{10} = MBB,\ S_{F2}^{11} = MBM,\ S_{F2}^{12} = MBH,\ S_{F2}^{13} = MMB,\ S_{F2}^{14} = MMM,\ S_{F2}^{15} = MMH, S_{F2}^{16} = MHB,\ S_{F2}^{17} = MHM,\ S_{F2}^{18} = MHH, \\ S_{F2}^{19} = HBB,\ S_{F2}^{20} = HBM,\ S_{F2}^{21} = HBH,\ S_{F2}^{22} = HMB,\ S_{F2}^{23} = HMM,\ S_{F2}^{24} = HMH, S_{F2}^{25} = HHB,\ S_{F2}^{26} = HHM,\ S_{F2}^{27} = HHH, \end{Bmatrix}$$

- La forme normale du jeu est alors une matrice 3×27

  Trop long à écrire => on travaille directement sur la forme extensive et on résout par induction *backward*



Il existe un seul équilibre de Nash parfait : l'équilibre de Stackelberg

Par rapport à la situation de Cournot le *leader*, en mettant une quantité plus importante sur le marché, impose sa loi au *follower* qui ne peut que restreindre sa production pour éviter une trop forte dégradation du prix de vente : $Y_{F2}^{C} > Y_{F2}^{S}$ et $Y_{F1}^{C} < Y_{F1}^{S}$. Jouer en premier donne bien un avantage : $\Pi_{F2}^{C} > \Pi_{F2}^{S}$ et $\Pi_{F1}^{C} < \Pi_{F1}^{S}$.

Pour autant les firmes auraient intérêt à coopérer et former un cartel

7. – Concurrence par les prix : le duopole de Bertrand

On suppose ici que les firmes ne se font plus concurrence par les quantités mais par les prix.

2 firmes i=1,2, confrontées à une demande globale $D(p)$, se faisant concurrence par les prix : p_1 et p_2

La demande adressée à chaque firme est donnée par :

$$Y_1 = \begin{cases} D(p_1) & \text{si } p_1 < p_2 \\ 0 & \text{si } p_1 > p_2 \\ \frac{D(p_1)}{2} & \text{si } p_1 = p_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad Y_2 = \begin{cases} D(p_2) & \text{si } p_2 < p_1 \\ 0 & \text{si } p_2 > p_1 \\ \frac{D(p_2)}{2} & \text{si } p_2 = p_1 \end{cases}$$

7.1. – L'équilibre avec coûts identiques

Le coût marginal est supposé égal à c pour chaque firme : $C_i(Y_i) = cY_i$

Le profit de la firme i est donc : $\Pi_i = (p_i - c)Y_i$ i=1,2

Le problème d'une firme est de maximiser son profit en considérant le prix de l'autre comme une donnée (équilibre de Nash)

(i) Aucune firme ne choisit $p_i < c$ car cela entraine $\Pi_i < 0$

(ii) Il suffit donc d'identifier le comportement de la firme i si son adversaire choisit $p_{-i} > c$

a. Si i choisit $p_i > p_{-i} \Rightarrow Y_i = 0 \quad \Rightarrow \Pi_i^{p_i > p_{-i}} = 0$

b. Si i choisit $p_i = p_{-i} \Rightarrow Y_i = \frac{D(p_i)}{2} \quad \Rightarrow \Pi_i^{p_i = p_{-i}} = (p_i - c)\frac{D(p_i)}{2}$

c. Si i choisit $p_i < p_{-i} \Rightarrow Y_i = D(p_i) \quad \Rightarrow \Pi_i^{p_i < p_{-i}} = (p_i - c)D(p_i)$

On a donc : $\Pi_i^{p_i < p_{-i}} > \Pi_i^{p_i = p_{-i}} > \Pi_i^{p_i > p_{-i}}$

La fonction de réaction de chaque firme est donc :

$$\forall i = 1{,}2 \qquad p_i = \mathcal{R}_i(p_{-i}) = \begin{cases} p_{-i} - \varepsilon & \forall p_{-i} > \mathrm{c} \\ p_{-i} \quad \text{si} & p_{-i} = \mathrm{c} \end{cases}$$

L'intersection des fonctions de réaction définit l'équilibre de duopole de Bertrand (qui est l'équivalent de l'équilibre de Cournot… mais pour une concurrence en prix)

Un seul équilibre de Nash : $p_1^* = p_2^* = c$

On a alors : $Y_1^* = Y_2^* = \frac{D(c)}{2}$, $Y^* = D(c)$ et $\Pi_1^* = \Pi_2^* = 0$

On retrouve alors paradoxalement, en situation de duopole, le même résultat qu'en concurrence parfaite *via* une guerre des prix

7.2. – L'équilibre avec coûts hétérogènes

Le coût marginal est supposé différent pour chaque firme : $C_i(Y_i) = c_iY_i$ avec $c_1 < c_2$

La firme 1 a un avantage de coûts *i.e.* technologie de production plus « efficace »

Le profit de la firme i s'écrit : $\Pi_i = (p_i - c_i)Y_i$ i=1,2

Quelle est la fonction de réaction de la firme 1 ?

(i) Si la firme 1 choisit $p_1 > c_2$, alors la meilleure réponse de la firme 2 est $p_2 = p_1 - \varepsilon > c_2$ qui permet à la firme 2 de s'accaparer toute la demande $Y_2 = D(p_1 - \varepsilon)$ et de réaliser un profit $\Pi_2 = (p_1 - \varepsilon - c_2)D(p_1 - \varepsilon) > 0$, tandis que la firme 1 perd tout le marché $Y_1 = 0$ et réalise un profit nul

(ii) Choisir $p_1 = c_2$ serait par ailleurs prendre le risque que la firme 2 charge un prix $p_2 = c_2$ et prenne la moitié du marché en réalisant un profit nul

(iii) Pour maximiser son profit la firme 1 choisit donc nécessairement $p_1 < c_2$ qui exclut *de facto* la firme 2 du marché et laisse la firme 1 seule sur le marché. Deux cas sont alors possibles :

a. $c_2 > p_1^M > c_1$: dans ce cas la firme 1 possède un avantage de coûts important, qui lui permet de choisir son prix de monopole : $p_1 = p_1^M$ qui maximise son profit. On se retrouve alors dans la situation de monopole.

b. $c_2 > c_1$ mais $c_2 < p_1^M$: dans ce cas la firme 1 possède un avantage de coût plus faible, qui ne lui permet pas de charger son prix de monopole sans laisser la firme 2 rentrer sur le marché. La firme 1 choisit alors le plus haut prix qui ne laisse pas rentrer la firme 2, soit le *prix limite* : $p_1 = c_2 - \varepsilon$ (avec $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon \to 0$).

Le modèle de Bertrand avec coûts hétérogènes conduit donc à une situation de monopole…mais pas nécessairement à une solution de monopole

8. – L'oligopole discriminant

Comme dans le cas du monopole discriminant on suppose que les n entreprises présentes sur le marché – indicées par $i = 1, \dots, n$ – sont maintenant capables de segmenter le marché en k groupes de clients – indicés par j – caractérisés par des fonctions de demandes différentes :

$$Y_j = D_j(p), \quad D_j'(p) < 0 \quad j = 1, \dots, k$$

Les fonctions de demande inverse sont bien sûr également différentes et propre à chaque groupe :

$$p_j = D_j^{-1}(Y_j) = p_j(Y_j), \quad p_j'(Y_j) < 0, \quad j = 1, \dots, k$$

où p_j représente le prix maximal auquel la quantité Y_j peut être vendu au client du groupe j

On note Y_{ij} la production de la firme i vendue aux clients du groupe j

6.1. – Résolution

Si toutes les firmes adoptent un comportement de « type Cournot », en considérant les quantités des autres firmes comme des données, le problème de chaque firme $i = 1, \dots, n$ en situation d'oligopole s'écrit alors :

$$\forall i = 1, \dots, n \qquad \underset{\{Y_{i1}, \dots, Y_{ik}\}}{\text{Max}} \ \Pi_i(Y_{i1}, \dots, Y_{ik}) = \underbrace{\sum_{j=1}^{k} p_j(Y_j) Y_{ij}}_{R(Y_{i1}, \dots, Y_{ik})} - \mathbb{C}_i\left(\underbrace{\sum_{j=1}^{k} Y_{ij}}_{Y_i}\right)$$

$$s.t. \qquad Y_j = \sum_{i=1}^{n} Y_{ij}$$

Soit :

$$\underset{\{Y_{i1},\dots,Y_{ik}\}}{\text{Max}} \quad \Pi_{\mathrm{i}}(Y_{i1},\dots,Y_{ik}) \;=\; \underbrace{\sum_{j=1}^{k} p_j\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} Y_{ij}}_{Y_j}\right) Y_{ij}}_{R(Y_{i1},\dots,Y_{ik})} - \mathbb{C}_i\left(\underbrace{\sum_{j=1}^{k} Y_{ij}}_{Y_i}\right)$$

Et les conditions du premier ordre sont simplement :

$$\nabla\Pi_{\mathrm{i}} = 0 \quad \forall i = 1,\dots,n \qquad \Leftrightarrow \qquad \langle \frac{\partial \Pi_i(\cdot)}{\partial Y_{ij}} = 0 \;\; \forall j = 1,\dots,k \rangle \qquad \forall i = 1,\dots,n$$

On a alors un système de $(k \times n)$ équations à $(k \times n)$ inconnues:

$$(Y_{11},\dots,Y_{1k}),(Y_{21},\dots,Y_{2k}),\dots,(Y_{n1},\dots,Y_{nk})$$

Dont la résolution donne immédiatement :

$$Y_{ij}^* \qquad j = 1,\dots,k \quad i = 1,\dots,n$$

Et ensuite :

(i) les productions de chaque firme : $Y_i^* = \sum_{j=1}^{k} Y_{ij}^* \quad i = 1,\dots,n$
(ii) les quantités vendues à chaque segment du marché : $Y_j^* = \sum_{i=1}^{n} Y_{ij}^* \quad j = 1,\dots,k$
(iii) les prix de vente selon les segments : $p_j^* = D_j^{-1}(Y_j^*) \quad j = 1,\dots,k$
(iv) la production globale d'équilibre : $Y^* = \sum_{i=1}^{n} Y_i^* = \sum_{j=1}^{k} Y_j^*$

6.2. – Propriétés

On a à l'équilibre : $\frac{\partial \Pi_i(\cdot)}{\partial Y_{ij}} = 0 \quad \forall j = 1,\dots,k \quad \forall i = 1,\dots,n$

avec : $\Pi_{\mathrm{i}}(Y_{i1},\dots,Y_{ik}) \;=\; \underbrace{\sum_{j=1}^{k} p_j\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} Y_{ij}}_{Y_j}\right) Y_{ij}}_{R(Y_{i1},\dots,Y_{ik})} - \mathbb{C}_i\left(\underbrace{\sum_{j=1}^{k} Y_{ij}}_{Y_i}\right)$

Soit : $\frac{\partial \Pi_i(\cdot)}{\partial Y_{ij}} = p_j'(Y_j)Y_{ij} + p_j(Y_j) - C_i'(Y_i) = 0 \quad \forall i = 1,\dots,n$

On a alors en sommant les n équations précédentes :

$$p_j'(Y_j)\sum_{i=1}^{n} Y_{ij} + np_j(Y_j) = \sum_{i=1}^{n} C_i'(Y_i)$$

Et en notant $C_m = \frac{\sum_{i=1}^{n} C_i'(Y_i)}{n}$ le coût marginal moyen :

$$p_j'(Y_j)Y_j + np_j(Y_j) = nC_m$$

Et finalement :

$$p_j = \underbrace{\frac{\sigma_{p_j}^{D_j}}{1/n + \sigma_{p_j}^{D_j}}}_{\gamma_j^n} . C_m$$

Où p_j est le prix de vente sur le segment j, $\sigma_{p_j}^{D_j}$ l'élasticité-prix de la demande des clients du groupe j et γ_j^n le taux de marge (*price mark-up*) sur le coût marginal moyen appliqué sur le segment j quand il y a n firmes.

On a bien sur, comme on l'a déjà montré : $\gamma_j^n > 1$ et $\frac{\partial \gamma_j^n}{\partial \left|\sigma_{p_j}^{D_j}\right|} < 0$

L'écart entre le prix attribué à un groupe de client et la moyenne des coûts marginaux est inversement proportionnel à la valeur absolue de l'élasticité-prix de la demande de ce groupe

Chapitre 4. – La différenciation des produits

Rappel du plan du cours :

		Produit	
		Homogène	**Différencié**
Nombre de firmes	**Important**	Concurrence parfaite *(petits agriculteurs)*	Concurrence monopolistique *(restaurants, écoles privées, boulangeries)*
	Limité	Oligopole *(électricité, gaz, TV câble, opérateurs téléphonie)*	Oligopole différencié *(voitures, sodas, téléphones)*
	Deux	Duopole *(Airbus/Boeing)*	Duopole différencié *(Airbus/Boeing, Apple/Samsung)*
	Une	Monopole *(eau, SNCF)*	

Différenciation de produit : des firmes différentes offrent, pour satisfaire un même besoin, des produits qui ne sont pas totalement identiques, du fait de leur qualité, de leur localisation, de leur design *etc*.

Il existe de nombreuses possibilités de différenciation :

- le produit : forme, style, design, fiabilité, gamme, image *etc.*
- le circuit de distribution: boutiques, personnel, nombre et localisation des points de vente
- les services associés : délais de livraison, installation, SAV, updates, formations *etc*.
- les modalités de paiement : crédit, cartes de paiement
- les avantages associés : cartes de fidélité

La différenciation des produits est une variable stratégique, permettant la mise en place d'un avantage concurrentiel. On a donc trois formes d'avantage concurrentiel :

- les coûts
- la différenciation
- une combinaison des deux

…et deux manières d'acquérir un avantage concurrentiel par la différenciation :

- en créant une différence réelle entre les produits
- en identifiant ou influençant les préférences des consommateurs par la publicité

On distingue généralement deux types de différenciation :

- différenciation *verticale* : produits de différentes qualités (les consommateurs s'accordent sur le classement des biens en termes de qualité)
- différenciation *horizontale* :

  (i) différentes variétés de produits choisies par le consommateur en fonction de ses goûts (différenciation de variété)

  (ii) différentes variétés de produits choisies par le consommateur en fonction de leur localisation (différenciation spatiale)

Les questions que nous allons nous poser :

- Quel est l'effet de la différenciation sur la concurrence entre les firmes ?
- Quels sont les effets de la différenciation sur l'entrée de nouveaux concurrents sur un marché?
- Lorsque la différenciation est endogène, existe-t-il des équilibres dans lesquels les entreprises se différencient effectivement ?
- Les produits offerts dans un tel équilibre sont-ils proches ou éloignés ?

1. – La différenciation horizontale

La question qui va nous intéresser ici est celle de la localisation optimale des firmes sur un marché : différenciation spatiale.

Mais on peut aussi penser cela comme une localisation dans l'espace des goûts.

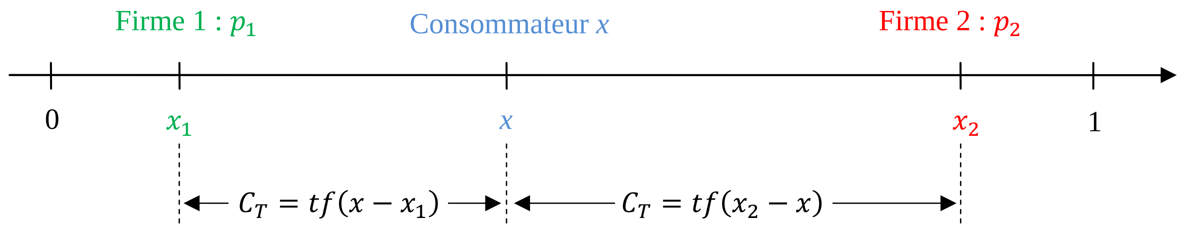
Si les entreprises peuvent se différencier vont-elles se différencier ? Et si oui trop ou pas assez ?

1.1. – Les modèles de « ville linéaire »

- Cadre général d'analyse : différenciation spatiale

  - Une « ville linéaire » de longueur unitaire représentée par le segment [0,1]
  - 2 firmes en situation de duopole vendant le même bien et dont la position est représentée par leurs abscisses x_1 et x_2 sur le segment
  - Le coût unitaire de production est supposé constant : $C_m = c > 0$
  - N consommateurs distribués uniformément sur le segment [0,1]: la position d'un consommateur est représentée par son abscisse x sur le segment
  - Un coût de transaction (coût de transport) supposé croissant avec la distance d parcourue pour réaliser une transaction : $C_T = tf(d), \quad f'(\cdot) > 0$. (le coût d'achat du bien pour un consommateur est donc $p + C_T$)
  - Les consommateurs achètent 0 ou 1 unité de bien
  - L'utilité du bien pour un consommateur est notée v
  - Les firmes peuvent choisir le prix de vente p et/ou leur localisation

- Représentation graphique



Nota : dans le schéma ci-dessus il y a xN consommateurs situés à gauche du consommateur x et $(1-x)N$ consommateurs situés à la droite de x

- Variables endogènes ?

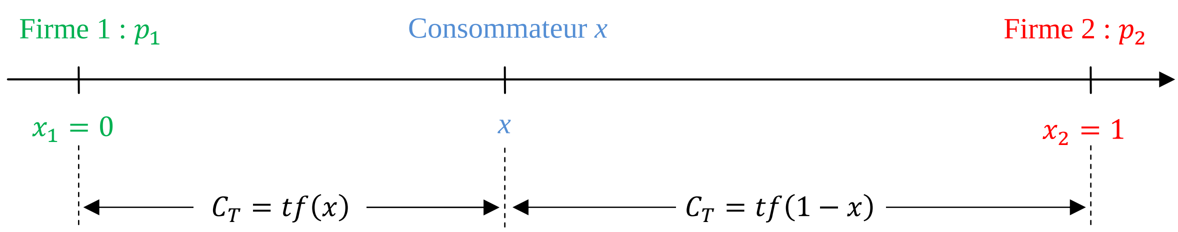
  3 situations possibles à étudier :

Prix $= (p_1, p_2)$ / **Localisation** $= (x_1, x_2)$	**Exogène**	**Endogène**
Exogène		
Endogène		

- Propriétés du coût de transport *i.e.* de la fonction $f(d)$. Plusieurs possibilités :
  - Coût proportionnel à la distance : $f(d) = d \Rightarrow C_T = t \times d$
  - Fonction convexe de la distance : par exemple $f(d) = d^2 \Rightarrow C_T = t \times d^2$

1.1.1. – Localisation exogène et prix endogènes

On suppose, sans perte de généralité, que les firmes sont situées chacune à un bout du segment, soit $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$



- **Résolution avec un coût de transport proportionnel**

Dans ce cas $f(d) = d$ *i.e.* $C_T = t \times d$

Le consommateur x supporte alors un coût de transaction (coût de transport) :

- $C_T^1 = t.x$ s'il choisit d'acheter à la firme 1
- $C_T^2 = t.(1-x)$ s'il choisit d'acheter à la firme 2

Compte tenu des prix respectifs des deux firmes, un consommateur x choisira donc d'acheter à la firme 1 si :

$$p_1 + t.x \; < \; p_2 + t.(1-x)$$

$$i.e. \quad x < \frac{p_2 - p_1 + t}{2t} = \bar{x}$$

La demande adressée à la firme 1 est donc la somme de toutes les demandes unitaires des consommateurs situés à gauche du consommateur $\bar{x}$:

$$D_1 = \bar{x}N = \frac{p_2 - p_1 + t}{2t}.N$$

Tandis que la demande adressée à la firme 2 est la somme de toutes les demandes unitaires des consommateurs situés à droite du consommateur $\bar{x}$:

$$D_2 = (1-\bar{x})N = \left(1 - \frac{p_2 - p_1 + t}{2t}\right)N$$

$$= \frac{p_1 - p_2 + t}{2t}.N$$

Nota : On suppose ici que tous les consommateurs achètent le bien à l'une ou l'autre firme ce qui revient à supposer que v est suffisamment élevée pour que le consommateur situé au milieu de la ville, *i.e.* en 1/2, dont le coût d'achat est le plus élevé, ait intérêt à acheter le bien malgré le coût de transport

On suppose également les deux prix suffisamment proches l'un de l'autre de façon à ce que, compte tenu de t, les demandes soient toutes les deux positives (on verra que cette condition est vérifiée à l'équilibre)

Les profits des 2 firmes sont donc :

$$\Pi_1 = (p_1 - \mathrm{c})D_1 = (p_1 - \mathrm{c})\frac{p_2 - p_1 + t}{2t}.N$$

$$\Pi_2 = (p_2 - \mathrm{c})D_2 = (p_2 - \mathrm{c})\frac{p_1 - p_2 + t}{2t}.N$$

Les firmes maximisant leur profit en choisissant les prix leurs fonctions de réaction sont données par :

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial p_1} = \frac{p_2 - 2p_1 + c + t}{2t}.N = 0 \;\Leftrightarrow\; p_1 = \mathcal{R}_1(p_2) = \frac{p_2 + c + t}{2}$$

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial p_2} = \frac{p_1 - 2p_2 + c + t}{2t}.N = 0 \;\Leftrightarrow\; p_2 = \mathcal{R}_2(p_1) = \frac{p_1 + c + t}{2}$$

L'équilibre non-coopératif est alors défini par l'intersection des fonctions de réaction (équilibre de Nash du jeu simultané), soit par la résolution des 2 équations :

$$p_1 = \frac{\left(\frac{p_1 + c + t}{2}\right) + c + t}{2}$$

$$p_2 = \frac{\left(\frac{p_2 + c + t}{2}\right) + c + t}{2}$$

Qui donne immédiatement : $$p_1^* = p_2^* = c + t > C_m$$

A l'équilibre, les 2 firmes choisissent le même prix qui est supérieur au coût marginal, la différence étant égale au coût de transport par unité de distance t.

- Remarques

  - Lorsque le coût de transport est nul ($t = 0$) les biens sont *de facto* non différenciés. On retrouve alors les caractéristiques de l'équilibre de Bertrand (guerre des prix) :

  $$p_1^* = p_2^* = C_m \quad \text{et} \quad \Pi_1^* = \Pi_2^* = 0$$

  - Au contraire, en présence de coûts de transports ($t > 0$) les biens sont *de facto* différenciés ce qui donne à chaque firme un « pouvoir de marché » : celles-ci peuvent augmenter leur prix au delà du coût marginal de production sans perdre la totalité de leur clientèle

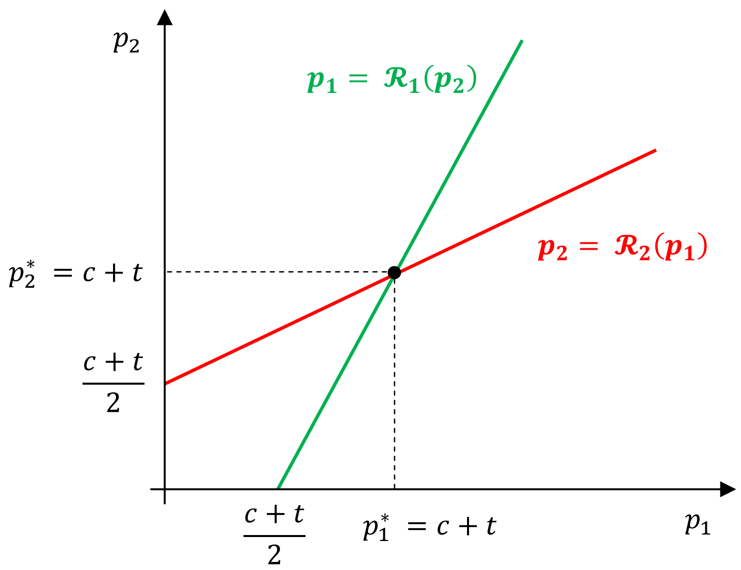
  - A l'équilibre on a :

  $$\Pi_1^* = (p_1^* - \mathrm{c})\frac{p_2^* - p_1^* + t}{2t}.N = \frac{tN}{2} = \Pi_2^*$$

  Les profits des firmes, *i.e.* le surplus du producteur, est d'autant plus élevé que le coût de transport par unité de distance t est élevé.

  Résultat logique : si le coût de déplacement est très élevé le consommateur est « prisonnier » de la firme la plus proche, ce qui donne à cette dernière une forte capacité à augmenter son prix.

- Représentation graphique :



- **Résolution avec un coût de transport quadratique**

Dans ce cas $f(d) = d^2$ *i.e.* $C_T = t \times d^2$

Le consommateur x supporte alors un coût de transaction (coût de transport) :

- $C_T^1 = t.x^2$ s'il choisit d'acheter à la firme 1
- $C_T^2 = t.(1-x)^2$ s'il choisit d'acheter à la firme 2

Compte tenu des prix respectifs des deux firmes, un consommateur x choisira donc d'acheter à la firme 1 si :

$$p_1 + tx^2 \; < \; p_2 + t.(1-x)^2$$

$$i.e. \quad x \; < \; \frac{p_2 - p_1 + t}{2t} = \bar{x}$$

On voit que le fait de prendre un coût de transport quadratique ne change pas la condition obtenue précédemment.

Le reste du raisonnement est donc identique et on retrouve le même résultat :

$$p_1^* \; = \; p_2^* \; = \; c + t \; > \; C_m$$

1.1.2. – Localisation endogène et prix exogènes

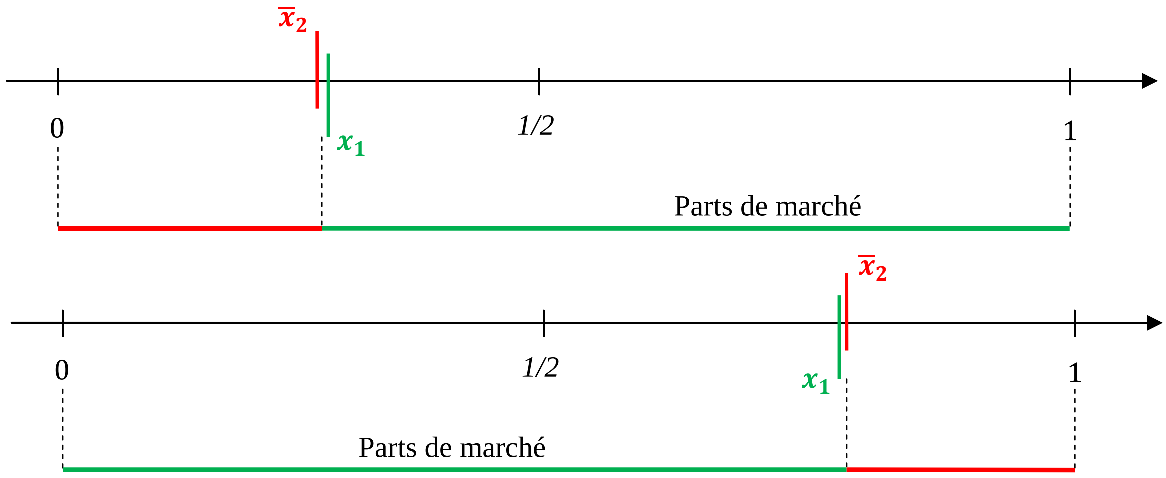
On suppose que le prix de vente est exogène et fixé par le marché $p_1 = p_2 = p$. Le problème des firmes est de choisir leurs localisations x_1 et x_2 optimales – *i.e.* celles qui maximise leurs profits respectifs – sur le segment [0,1].

Dans ce cas si le consommateur subit un coût de transport qui croit avec la distance, $C_T = t \times f(d)$, il va simplement acheter à la firme la plus proche afin de minimiser son coût de transport pour maximiser son surplus net : $v - p - C_T$

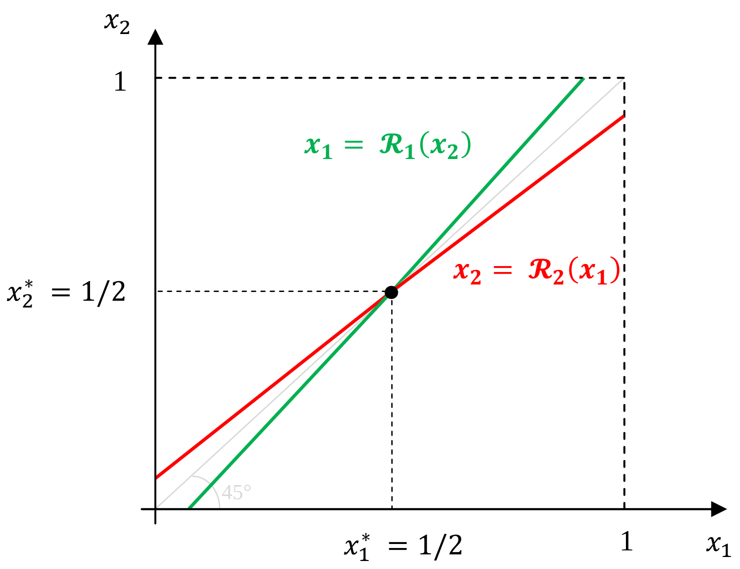
Calculons alors la fonction de réaction d'une firme *i* quelconque, i=1,2 :

- Si $x_{-i} < \frac{1}{2}$ la meilleure réponse de i est $x_i = x_{-i} + \varepsilon$
- Si $x_{-i} > \frac{1}{2}$ la meilleure réponse de i est $x_i = x_{-i} - \varepsilon$
- Si $x_{-i} = \frac{1}{2}$ la meilleure réponse de i est $x_i = x_{-i}$

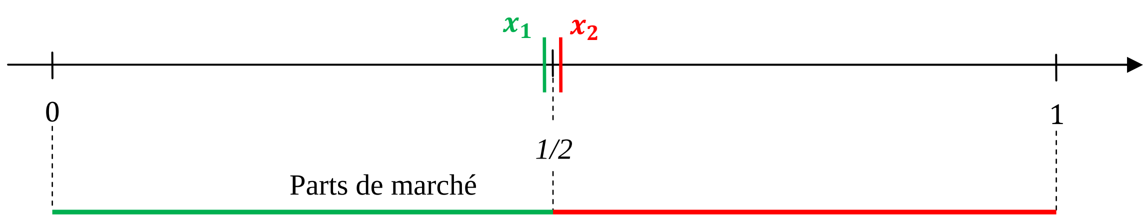
Représentation graphique : réaction optimale de la firme 1 à la localisation de la firme 2



L'équilibre non-coopératif (équilibre de Nash du jeu simultané) est défini par l'intersection des fonctions de réactions, soit $x_1^* = x_2^*$



A l'équilibre les firmes choisissent la même localisation : résultat de *différenciation minimale* si les prix sont exogènes (Hotelling [1929])



1.1.3. – Localisation et prix endogènes

Nota : On suppose le coût de transport subit par les consommateurs de la forme : $C_T = t \times d^2$

Structure de la concurrence : les firmes se font concurrence par les prix (Bertrand) et la localisation (différenciation spatiale)

Résolution nettement plus compliquée

Jeu dynamique à 2 périodes:

- Période 1 : les firmes choisissent leurs localisations
- Période 2 : elles se font concurrence en prix

Ordre de jeu : choix de x_1 et x_2, puis sélection de p_1 et p_2

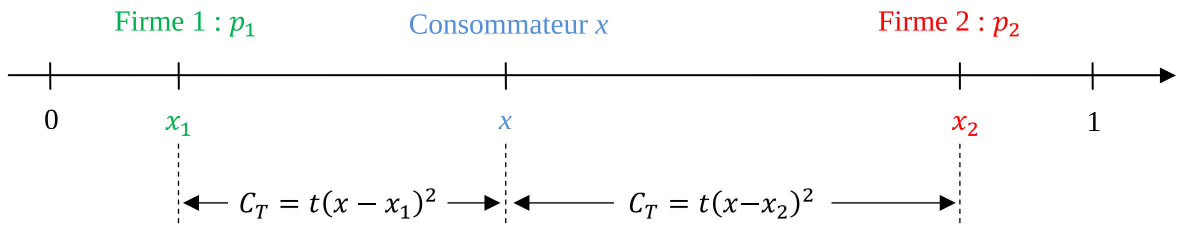
Mode de résolution similaire à celui utilisé pour calculer l'équilibre de Stackelberg : on cherche l'équilibre parfait du jeu => raisonnement par *backward induction*

Résolution en 2 étapes :

- Etape 1 : identification de l'équilibre de concurrence en prix (*i.e.* des choix de la période 2)
- Etape 2 : détermination des localisations optimales (choix de la période 1), en supposant que les firmes anticipent qu'à la seconde période, l'équilibre de concurrence en prix sera joué

- **1ère étape**

Cette étape consiste à identifier les stratégies de prix des firmes en supposant leurs localisations x_1 et x_2 exogènes



Dans ce cas un consommateur x choisira d'acheter à la firme 1 si :

$$p_1 + t(x - x_1)^2 < p_2 + t(x - x_2)^2$$

$$i.e. \quad x < \frac{p_2 - p_1}{2t(x_2 - x_1)} + \frac{x_1 + x_2}{2} = \bar{x}$$

La demande adressée à la firme 1 est donc la somme de toutes les demandes unitaires des consommateurs situés à gauche du consommateur « médian » $\bar{x}$:

$$D_1 = \bar{x}N = \left(\frac{p_2 - p_1}{2t(x_2 - x_1)} + \frac{x_1 + x_2}{2}\right).N = D_1(p_1, p_2, x_1, x_2, t, N)$$

Tandis que la demande adressée à la firme 2 est la somme de toutes les demandes unitaires des consommateurs situés à droite du consommateur $\bar{x}$:

$$D_2 = (1-\bar{x})N = \left(\frac{p_1 - p_2}{2t(x_2 - x_1)} + \frac{2 - x_1 - x_2}{2}\right)N = D_2(p_1, p_2, x_1, x_2, t, N)$$

Les profits des 2 firmes sont donc :

$$\Pi_1 = (p_1 - \mathrm{c})D_1 = (p_1 - \mathrm{c})\left(\frac{p_2 - p_1}{2t(x_2 - x_1)} + \frac{x_1 + x_2}{2}\right).N$$

$$\Pi_2 = (p_2 - \mathrm{c})D_2 = (p_2 - \mathrm{c})\left(\frac{p_1 - p_2}{2t(x_2 - x_1)} + \frac{2 - x_1 - x_2}{2}\right)N$$

Les firmes maximisant leur profit en choisissant les prix leurs fonctions de réaction sont calculées facilement :

- ***Firme 1***

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial p_1} = D_1 + (p_1 - \mathrm{c})\frac{\partial \mathrm{D}_1}{\partial p_1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\left(\frac{p_2 - p_1}{2t(x_2 - x_1)} + \frac{x_1 + x_2}{2}\right).N}_{D_1} + \frac{(p_1 - \mathrm{c})N}{2t(x_1 - x_2)} = 0 \qquad [R1]$$

La résolution en p_1 de $[R1]$ donne la fonction de réaction de la firme 1 :

$$p_1 = \frac{1}{2}p_2 + \frac{t(x_2^2 - x_1^2) + c}{2} = \mathcal{R}_1(p_2 | \, x_1, x_2, t)$$

- ***Firme 2***

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial p_2} = D_2 + (p_2 - \mathrm{c})\frac{\partial \mathrm{D}_2}{\partial p_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\left(\frac{p_1 - p_2}{2t(x_2 - x_1)} + \frac{2 - x_1 - x_2}{2}\right)N}_{D_2} + \frac{(p_2 - \mathrm{c})N}{2t(x_1 - x_2)} = 0 \qquad [R2]$$

La résolution en p_2 de $[R2]$ donne la fonction de réaction de la firme 2 :

$$p_2 = \frac{1}{2}p_1 + \frac{t(x_2 - x_1)(2 - x_1 - x_2) + c}{2} = \mathcal{R}_2(p_1 | \, x_1, x_2, t)$$

L'intersection des fonctions de réactions (de seconde période) des 2 firmes, *i.e.* la résolution en p_1 et p_2 du système $[R1] - [R2]$, permet de déterminer les prix d'équilibre à la seconde période :

$$p_1^* = c + t(x_2 - x_1)\left(\frac{2 + x_1 + x_2}{3}\right) = p_1^*(x_1, x_2, t)$$

$$p_2^* = c + t(x_2 - x_1)\left(\frac{4 - x_1 - x_2}{3}\right) = p_2^*(x_1, x_2, t)$$

Ce qui termine la résolution de la 1ère étape.

Interprétation :

- $\frac{\partial p_i^*}{\partial t} > 0 \;\; \forall i$: une hausse des coûts de transport (*i.e.* des produits moins substituables) diminue la concurrence ce qui se traduit *in fine* par une hausse des prix

- $\frac{\partial p_1^*}{\partial x_2} > 0$ pour une localisation x_1 donnée de la firme 1, un mouvement de la firme 2 vers la droite (*i.e.* une hausse x_2) éloigne la firme 2 de la firme 1, ce qui augmente le pouvoir de marché de la firme 1 et donc son prix

- $\frac{\partial p_2^*}{\partial x_1} < 0$ pour une localisation x_2 donnée de la firme 2, un mouvement de la firme 1 vers la droite (*i.e.* une hausse de x_1) rapproche la firme 1 de la firme 2, ce qui diminue le pouvoir de marché de la firme 2 et donc son prix

- **2nde étape**

Lors de cette étape chaque firme choisit sa localisation :

- en considérant le choix de localisation de l'autre firme comme donné
- en anticipant l'équilibre en prix de la période 2 (calculé à l'étape 1)

Le problème de maximisation du profit d'une firme i, $\mathrm{i} = 1{,}2$, s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \underset{\{x_i\}}{\text{Max}} \quad & \Pi_\mathrm{i} = (p_\mathrm{i} - \mathrm{c})D_i \\ s.t. \quad & D_i = D_i(p_i, p_{-i}, x_i, x_{-i}) \quad \forall i \\ & p_i = p_i^*(x_i, x_{-i},) \quad \forall i \end{aligned}$$

Soit :

$$\underset{\{x_i\}}{\text{Max}} \quad \Pi_\mathrm{i}(x_i|x_{-i}) = (p_i^*(x_i, x_{-i},) - \mathrm{c}) \times D_i[p_i^*(x_i, x_{-i},), p_{-i}^*(x_i, x_{-i}), x_i, x_{-i}]$$

Les fonctions de réaction des firmes sont alors déterminées par :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_1}{\partial x_1} = 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; x_1 = \mathcal{R}_1(x_2) \\ \frac{\partial \Pi_2}{\partial x_2} = 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; x_2 = \mathcal{R}_2(x_1) \end{aligned}\right\}$$

Les localisations optimales des firmes, x_1^* et x_2^* , sont alors simplement déterminées par l'intersection des fonctions de réaction *i.e.* la résolution du système ci-dessus de 2 équations à 2 inconnues : on obtient $x_1^* = 0$ et $x_2^* = 1$ (*nota* : calcul long et sans intérêt).

C'est le principe de différenciation maximale.

Interprétation :

Considérons par exemple la firme 1. On a :

$$\Pi_1 = (p_1 - \mathrm{c})D_1(p_1, p_2, x_1, x_2) \quad \text{avec} \quad p_1(x_1, x_2) \text{ et } p_2(x_1, x_2)$$

On a donc :

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial x_1} = \underbrace{\frac{\partial \Pi_1}{\partial p_1}}_{=0} \cdot \frac{\partial \mathrm{p}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Pi_1}{\partial D_1} \cdot \left(\frac{\partial D_1}{\partial x_1} + \frac{\partial D_1}{\partial p_2} \cdot \frac{\partial \mathrm{p}_2}{\partial x_1} \right) = 0$$

$$i.e. \quad (p_1 - \mathrm{c}) \cdot \left(\underbrace{\frac{\partial D_1}{\partial x_1}}_{(\mathbf{1})} + \underbrace{\frac{\partial D_1}{\partial p_2} \cdot \frac{\partial \mathrm{p}_2}{\partial x_1}}_{(\mathbf{2})} \right) = 0$$

- **(1)** Effet demande (parts de marché) direct : $\frac{\partial D_1}{\partial x_1} > 0$. Se rapprocher de la firme 2 augmente la demande adressée à la firme 1 *i.e.* sa part de marché
- **(2)** Effet stratégique indirect : $\frac{\partial D_1}{\partial p_2} \cdot \frac{\partial \mathrm{p}_2}{\partial x_1} = \frac{x_1 - 2}{3(x_2 - x_1)} < 0$. Se rapprocher de la firme 2 incite celle-ci à être plus agressive sur ses prix ce qui diminue la demande adressée à la firme 1

- **« Bouclage »**

En reportant les localisations optimales x_1^* et x_2^* dans les expressions des prix d'équilibre obtenues lors de la 1ère étape de la résolution, on obtient finalement les prix chargés par les 2 entreprises :

$$p_1^* = p_1^*(x_1^*, x_2^*) = c + t(x_2^* - x_1^*)\left(\frac{2 + x_1^* + x_2^*}{3}\right) = c + t$$

$$p_2^* = p_2^*(x_1^*, x_2^*) = c + t(x_2^* - x_1^*)\left(\frac{4 - x_1^* - x_2^*}{3}\right) = c + t$$

- **Résultats**

  - Les firmes sont face à un arbitrage :

    i. elles sont inciter à se différencier, en s'éloignant l'une de l'autre, pour atténuer l'effet de la concurrence et être à même de charger des prix élevés (effet stratégique)

    ii. mais elles ont aussi des incitations à se rapprocher pour prendre des parts de marché à leur rivale (effet parts de marché)

- Les calculs montrent que l'effet stratégique domine l'effet part de marché. A l'équilibre parfait du jeu les firmes se différencient au maximum en se situant aux deux extrémités du segment : $x_1^* = 0$ et $x_2^* = 1$. On a alors : $p_1^* = p_2^* = c + t$

    i. Lorsque le coût de transport est nul ($t = 0$) les biens sont *de facto* non différenciés. On retrouve alors les caractéristiques de l'équilibre de Bertrand de guerre des prix :

$$p_1^* = p_2^* = C_m \quad \text{et} \quad \Pi_1^* = \Pi_2^* = 0$$

    ii. En présence de coûts de transports ($t > 0$) l'écart dans les localisations donne à chaque firme un « pouvoir de marché » : elles peuvent alors augmenter leur prix au delà du coût marginal

- On a par ailleurs à l'équilibre :

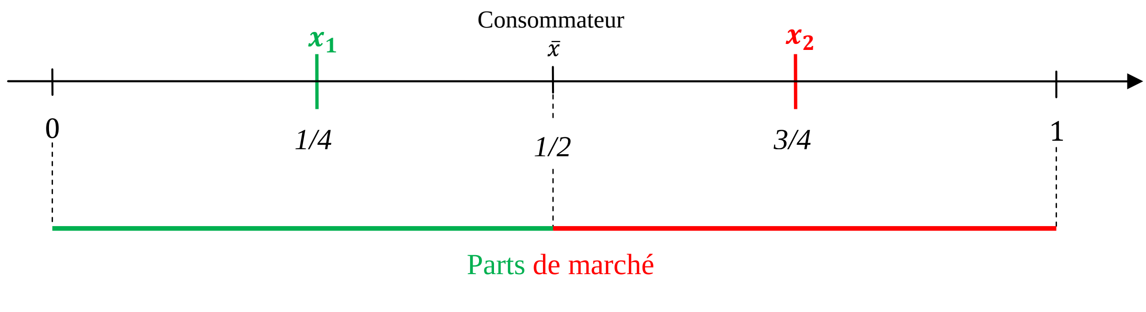
$$\Pi_1^* = (p_1^* - \mathrm{c})\left(\frac{p_2^* - p_1^*}{2t(x_2^* - x_1^*)} + \frac{x_1^* + x_2^*}{2}\right).N = \frac{tN}{2}$$
$$\Pi_2 = (p_2^* - \mathrm{c})\left(\frac{p_1 - p_2^*}{2t(x_2^* - x_1^*)} + \frac{2 - x_1^* - x_2^*}{2}\right)N = \frac{tN}{2}$$

Les profits des firmes, *i.e.* le surplus du producteur, est d'autant plus élevé que le coût de transport par unité de distance *t* est élevé.

- **Commentaires**

Les firmes se différencient-elles trop ?

Les consommateurs étant uniformément répartis sur $[0,1]$ et les coûts de transport quadratiques, l'optimum social, correspondant à la minimisation des coûts de transport, impliquerait une localisation des firmes en $x_1^* = 1/4$ et $x_2^* = 3/4$

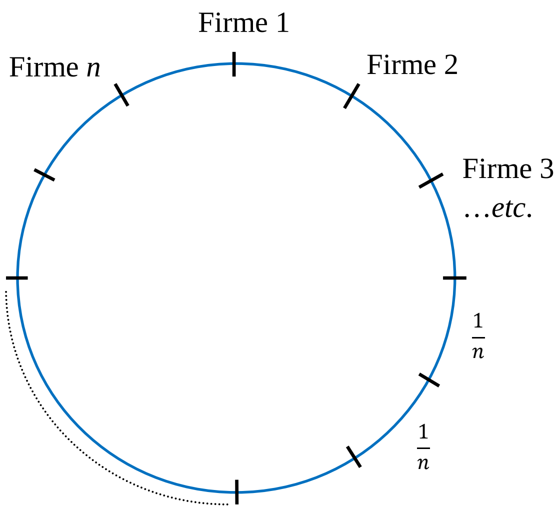


De ce point de vue le marché conduit donc à une différenciation des produits trop importante et très inefficace : les gains de bien être potentiels, liés à des coûts de transport plus faibles, ne sont pas capturés par les firmes

1.2. – Les modèles de « ville circulaire »

- **Hypothèses**

  - une « ville circulaire » représentée par un cercle de périmètre unitaire
  - une masse $N = 1$ de consommateurs répartis uniformément sur ce cercle, dont les coûts de transports sont linéaires : $C_T = t \times d$, et qui achètent chacun une unité de bien
  - n firmes identiques positionnées de façon uniformes sur le cercle et se faisant concurrence en prix
  - un coût unitaire de production est supposé constant : $C_m = c > 0$
  - libre entrée sur le marché à un coût fixe d'entrée f
  - lorsque des firmes entrent sur le marché elles ne choisissent pas leur localisation mais sont équidistantes les unes des autres



- **Modélisation**

Jeu dynamique à 2 périodes:

- Période 1 : les firmes choisissent entre « *Entrer* » sur le marché ou « *Ne pas entrer* »
- Période 2 : elles se font concurrence en prix à localisation donnée

On cherche l'équilibre parfait du jeu => raisonnement par *backward induction*

Résolution en 2 étapes :

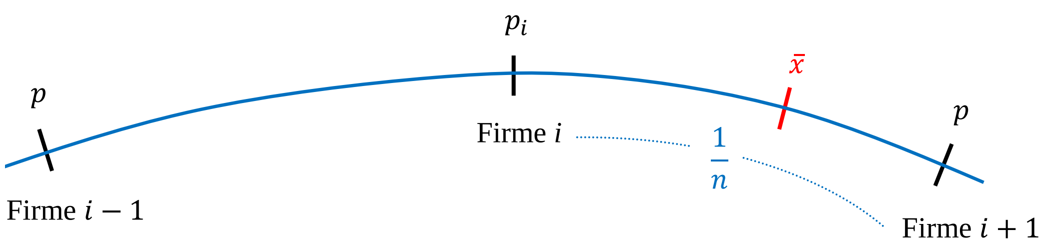
- Etape 1 : identification de l'équilibre de concurrence en prix (*i.e.* des choix de la période 2)
- Etape 2 : détermination du nombre de firmes qui vont entrer sur le marché

- **1ère étape**

Cette étape consiste à identifier les stratégies de prix des firmes en supposant leurs localisations exogènes

Considérons une firme i parmi les n :

- celle-ci a 2 rivaux – les firmes $(i-1)$ et $(i+1)$ – qui proposent le même prix p (puisque toutes les firmes sont identiques)
- chacun de ces 2 rivaux est situé à une distance $1/n$ de la firme i



Notons $\bar{x}$ le consommateur indifférent entre la firme i et son rival situé $1/n$ plus loin. Celui-ci est défini par :

$$p_i + tx = p + t\left(\frac{1}{n} - x\right)$$

$$i.e. \quad \bar{x} = \frac{p - p_i}{2t} + \frac{1}{2n}$$

La demande adressée à la firme i provenant à la fois de sa « gauche » et de sa « droite », s'écrit :

$$D_i(p_i, p) = 2\bar{x} = \frac{p - p_i}{t} + \frac{1}{n}$$

Le profit de la firme i est donc :

$$\Pi_i(p_i, p) = (p_i - c)D_i(p_i, p)$$

Et le programme permettant de déterminer la fonction de réaction $p_i = \mathcal{R}_i(p)$ d'une firme i quelconque à la 2nde période du jeu s'écrit:

$$\max_{\{p_i\}} \quad \Pi_i(p_i, p) = (p_i - c)D_i(p_i, p)$$

$$s.t. \quad D_i(p_i, p) = \frac{p - p_i}{t} + \frac{1}{n}$$

Dont la condition du 1er ordre est :

$$\frac{\partial \Pi_i(p_i, p)}{\partial p_i} = D_i(p_i, p) - \frac{(p_i - c)}{t} = 0$$

$$i.e. \qquad p_i = \frac{(p + c + {}^{t}/_{n})}{2} = \mathcal{R}_i(p)$$

L'intersection des fonctions de réaction des firmes correspond à l'équilibre symétrique $p_i = p\ \forall i$, qui définit le comportement de prix des firmes à la 2nde période du jeu :

$$p = \frac{(p + c + {}^{t}/_{n})}{2} \quad \Leftrightarrow \quad p^* = c + {}^{t}/_{n} = p_i^* \quad \forall i$$

La marge bénéficiaire, $(p_i^* - c) = {}^{t}/_{n}$, décroit avec le nombre de firmes *n* présentes sur le marché.

On retrouve le résultat que l'on obtenait avec une « ville linéaire », mais avec la différence que le nombre de firme est ici endogène (condition de libre entrée sur le marché)

- **2nde étape**

Cette étape consiste à déterminer le nombre de firmes qui vont entrer sur le marché.

Le profit obtenu par un entrant sur le marché, à l'équilibre, est :

$$\Pi_i^* = (p_i^* - c)D_i(p_i^*, p^*) = \frac{t}{n} \cdot \frac{1}{n} - f$$

Celui-ci décroit avec n

Le nombre d'entrants est alors défini par la condition de nullité du profit à l'équilibre, soit :

$$n^* = \sqrt{{}^{t}/_{f}}$$

- **Bouclage**

Le prix chargé par chaque firme à l'équilibre est donné par :

$$p^{**} = c + {}^{t}/_{n^*} = c + \sqrt{tf} > c$$

- **Résultats**

  - Les firmes fixent un prix d'autant plus supérieur au coût marginal, que les coûts de transport et d'entrée sont élevés

  - Malgré cela elles réalisent un profit nul à l'équilibre (libre entrée).

    Cela montre que le fait d'observer un profit nul dans une industrie ne signifie pas que les firmes n'ont pas de « pouvoir de marché » (au sens de leur capacité à imposer un prix supérieur au coût marginal)

  - On retrouve bien $p^{**} = c$ si le coût de transport et/ou le coût d'entrée est nul

- **Commentaires**

Question : y a-t-il trop ou pas assez de firmes à l'équilibre ?

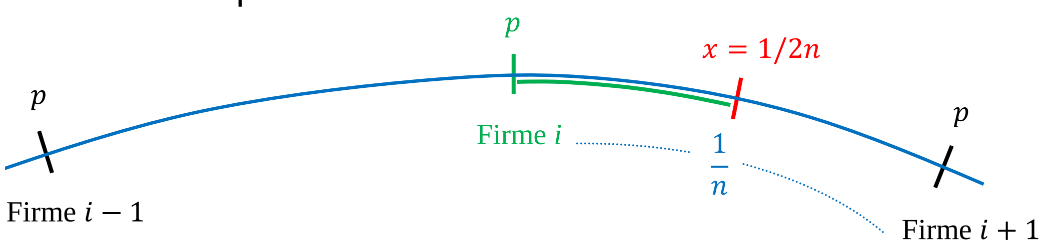
Comparaison de l'équilibre obtenu avec celui qui correspondrait à un optimum social.

Si un planificateur social « omniscient » choisit n librement, son objectif est de minimiser la somme S_C des coûts de transport et des coûts d'entrée qui sont des inefficacités en termes de surplus global *i.e.* des gains potentiels capturés par aucun agent :

- Coût total de transport $= n \times 2\ \underbrace{\left(t\int_0^{1/2n} x\,dx\right)}_{\text{Coûts des consommateurs situés à droite d'une firme}} = \frac{t}{4n}$

  Nombre de firmes

  Prise en compte des consommateurs situés à gauche



- Coût total d'entrée $= nf$

Le programme du planificateur social s'écrit donc :

$$\min_{\{n\}} \quad S_C = nf + \frac{t}{4n}$$

Le nombre « optimal » de firmes sur le marché est donné alors par :

$$\frac{\partial S_C}{\partial n} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{n} = \frac{1}{2}\sqrt{{}^{t}/_{f}} \ll n^*$$

Du point de vue de l'optimum social il y a deux fois trop de firmes qui entrent sur le marché => différenciation insuffisante : les firmes sont « trop » proches les unes des autres

- Une augmentation des coûts de transport accroit le nombre de firmes *i.e.* freine la différenciation : les firmes ont moins besoin de se différencier pour charger des prix plus élevés puisque les consommateurs sont davantage captifs

- Une hausse des coûts d'entrée sur le marché diminue le nombre de firme *i.e.* accroit la différenciation

Nota : Le résultat est similaire avec des coûts de transport quadratiques (*cf.* Tirole : *The Theory of Industrial Organization*)

1.3. – Conclusions sur la différenciation spatiale

Si les modèles utilisés sont relativement abstraits ils sont cependant utiles :

- Ils permettent de mieux comprendre la nature de la concurrence en présence de différenciation des produits
- Ils permettent de faire des prédictions importantes sur les stratégies des firmes
- Ils permettent de rendre compte aussi bien de la différenciation spatiale que de la différenciation de variété (identiques du point de vue formel)

1. Les firmes cherchent à se différencier pour limiter la concurrence en prix (*cf.* Bertrand et la guerre des prix)

   C'est ce qu'on observe effectivement dans le « monde réel » : Ordinateurs, téléphones *etc.*

2. La question du niveau de différenciation est importante : il y a des forces qui poussent à une différenciation *maximale* et d'autre qui poussent à une différenciation *minimale*.

   Du point de vue de l'optimum social la différenciation peut être dans certains cas trop forte… dans d'autre insuffisante. Il est donc essentiel d'analyser précisément le contexte dans lequel celle-ci s'opère.

3. Les forces qui régissent la détermination du niveau de différenciation sont de 3 types :

   (i) « Être là ou est la demande » : il ne faut pas qu'une différenciation excessive fasse perdre trop de consommateurs.

   Les firmes ne doivent pas trop s'éloigner du centre de la « ville linéaire » car c'est là qu'est la demande : il y a un *tropisme* vers le centre (force centripète). Le centre est une force de rappel importante.

   (ii) « Limiter la concurrence en prix » : la différenciation est un moyen d'acquérir du pouvoir de marché

   Les firmes ont intérêt à s'éloigner du centre de la « ville linéaire » pour être à même de charger des prix plus élevés » (force centrifuge)

   (iii) « Bénéficier d'externalités » : il peut y avoir des incitations pour les firmes à se rapprocher => partage d'infrastructures communes (centres commerciaux, installations portuaires), accès aux matières premières *etc.*

4. Nota : Si les firmes ne se font pas concurrence en prix (Hotelling [1929]), la force centrifuge disparait et il ne reste que la force centripète : principe de différenciation minimale.

2. – La différenciation verticale

Biens de différentes qualités. Tous les consommateurs préfèrent le produit de meilleure qualité.

Les firmes produisant un bien de qualité inférieure doivent fixer un prix plus bas pour attirer des consommateurs (sinon seule la firme produisant le bien de la qualité la plus élevée a une demande positive).

2.1.– Modélisation (Gabszewicz & Thisse [1979])

- **Hypothèses**

  - 2 firmes produisant des biens de qualités différentes, q_1 et q_2 avec $q_2 > q_1$ et $q_i \in [\underline{q}, \overline{q}]$
  - Les coûts de production unitaire des biens sont notés : $c_2 = c_1 = c$ (le coût de production de la qualité est nul)
  - N consommateurs, répartis uniformément sur l'intervalle $\theta \in [0,1]$ qui valorisent différemment la qualité :

$$U_\theta = \begin{cases} \theta q_i - p_i & \text{si achat à la firme } i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- **Modélisation**

Jeu dynamique à 2 périodes:

- Période 1 : les firmes choisissent la qualité
- Période 2 : elles fixent ensuite leurs prix simultanément

On cherche l'équilibre parfait du jeu => raisonnement par *backward induction*

2.2. – Résolution du jeu

Résolution en 2 étapes :

- Etape 1 : identification de l'équilibre de concurrence en prix (*i.e.* des choix de la période 2)
- Etape 2 : détermination des niveaux de qualité

▪ 1ère étape

Cette étape consiste à identifier les stratégies de prix des firmes en supposant leurs qualités exogènes

On identifie pour commencer le consommateur $\bar{\theta}$ indifférent entre acheter le bien 1 ou le bien 2.

Celui-ci est défini par l'égalité :

$$\bar{\theta}q_1 - p_1 = \bar{\theta}q_2 - p_2 \quad i.e. \quad \bar{\theta} = \frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1}$$

Les consommateurs caractérisé par $\theta < \bar{\theta}$ s'adressent à la firme 1 tandis que les autres s'adressent à la firme 2

La proportion des consommateurs achetant à la firme 1 est donc $\bar{\theta}$ tandis que celle des consommateurs s'adressant à la firme 2 est $(1 - \bar{\theta})$.

On en déduit la demande adressée à chaque firme :

$$D_1 = \frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1}N = D_1(p_1, p_2, q_1, q_2)$$

$$D_2 = \left(1 - \frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1}\right)N = D_2(p_1, p_2, q_1, q_2)$$

On remarque que si les deux firmes choisissent des prix identique ($p_1 = p_2$) la firme 2 capte tout le marché tandis que la firme 1 ne vend rien

Les profits des 2 firmes sont donc :

$$\Pi_1 = (p_1 - c)D_1 = (p_1 - c) \cdot \frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1}N$$

$$\Pi_2 = (p_2 - c)D_2 = (p_2 - c) \cdot \left(1 - \frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1}\right)N$$

Les firmes maximisant leur profit en choisissant les prix leurs fonctions de réaction sont calculées facilement :

- **Firme 1**

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial p_1} = D_1 + (p_1 - c)\frac{\partial D_1}{\partial p_1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1}N}_{D_1} - \frac{(p_1 - c)N}{q_2 - q_1} = 0 \qquad [R1]$$

La résolution en p_1 de $[R1]$ donne la fonction de réaction de la firme 1 :

$$p_1 = \frac{1}{2}p_2 + \frac{c}{2} = \mathcal{R}_1(p_2)$$

- **Firme 2**

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial p_2} = D_2 + (p_2 - c)\frac{\partial D_2}{\partial p_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\left(1 - \frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1}\right)N}_{D_2} - \frac{(p_2 - c)N}{q_2 - q_1} = 0 \qquad [R2]$$

La résolution en p_2 de $[R2]$ donne la fonction de réaction de la firme 2 :

$$p_2 = \frac{1}{2}p_1 + \frac{c + q_2 - q_1}{2} = \mathcal{R}_2(p_1)$$

Nota : complémentarité stratégique : $\partial p_i / \partial p_{-i} > 0$

- **Prix**

Les prix d'équilibre à la seconde période sont donnés par l'intersection des fonctions de réactions des 2 firmes *i.e.* la résolution du système :

$$\begin{cases} p_1 = \frac{1}{2}p_2 + \frac{c}{2} \\ p_2 = \frac{1}{2}p_1 + \frac{c + q_2 - q_1}{2} \end{cases}$$

On obtient :

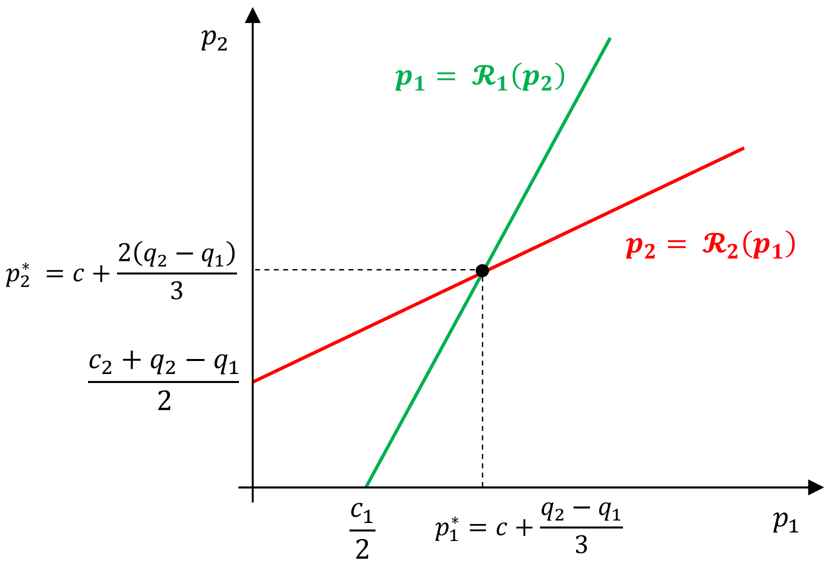
$$p_1^* = c + \frac{q_2 - q_1}{3} \quad \text{et} \quad p_2^* = c + \frac{2(q_2 - q_1)}{3}$$

Ce qui termine la résolution de la 1ère étape.

Remarques :

- la différenciation verticale (comme la différenciation horizontale) donne du pouvoir de marché aux firmes : $p_i^* > c \; \forall i$ dès que $q_2 > q_1$
- en l'absence de différenciation, *i.e.* si $q_2 \sim q_1$ on retrouve $p_1^* = p_2^* = c$. Dans ce cas on a $\Pi_1^* = \Pi_2^* = 0$ $\Rightarrow$ les firmes sont contraintes de se différencier si elles veulent réaliser un profit positif
- l'écart de prix entre les firmes est croissant avec la différenciation : $p_2^* - p_1^* = \frac{1}{3}(q_2 - q_1)$
- le prix d'une firme de haute qualité est supérieur à celui d'une firme de basse qualité

- **Représentation graphique**



▪ 2nde étape

Cette étape consiste à identifier les stratégies de qualité des firmes.

Lors de cette étape chaque firme choisit sa qualité :

- en considérant le choix de qualité de l'autre firme comme donné
- en anticipant l'équilibre en prix de la période 2 (calculé à l'étape 1)

- **Firme 1**

Le problème de maximisation du profit de la firme 1 s'écrit :

$$\begin{aligned}
&\underset{\{q_1\}}{\text{Max}} \quad && \Pi_1 = (p_1^* - c) \cdot \frac{p_2^* - p_1^*}{q_2 - q_1} N \\
&s.t. && p_1^* = c + \frac{q_2 - q_1}{3} \\
& && p_2^* = c + \frac{2(q_2 - q_1)}{3}
\end{aligned}$$

Soit :

$$\underset{\{q_1\}}{\text{Max}} \quad \Pi_1 = \frac{q_2 - q_1}{9} N$$

La fonction de réaction $\mathcal{R}_1(q_2)$ de la firme 1 est donc : $q_1 = \underline{q} \quad \forall \quad q_2$

- **Firme 2**

Le problème de maximisation du profit de la firme 2 s'écrit :

$$\underset{\{q_2\}}{\text{Max}} \quad \Pi_2 = (p_2^* - c) \cdot \left(1 - \frac{p_2^* - p_1^*}{q_2 - q_1}\right) N$$

$$s.t. \quad p_1^* = c + \frac{q_2 - q_1}{3}$$

$$p_2^* = c + \frac{2(q_2 - q_1)}{3}$$

Soit :

$$\underset{\{q_2\}}{\text{Max}} \quad \Pi_2 = \frac{4(q_2 - q_1)}{9} N$$

La fonction de réaction $\mathcal{R}_2(q_1)$ de la firme 2 est donc : $q_2 = \overline{q} \quad \forall \quad q_1$

- **Choix de qualités et différenciation**

L'intersection des fonctions de réaction définit l'équilibre de Nash parfait du jeu à 2 périodes :

$$q_1 = \underline{q} \quad \text{et} \quad q_2 = \overline{q}$$

On retrouve ici le résultat de *différenciation maximale* : une entreprise propose la qualité minimale et l'autre la qualité maximale.

Ce résultat déjà rencontré dans la section consacrée à la différenciation spatiale s'explique de la même manière : si les firmes peuvent choisir la qualité elles utilisent cette variable pour se différencier le plus possible, afin d'acquérir un pouvoir de marché maximum leur permettant de charger les prix élevés qui maximiseront leurs profits.

La différenciation des produits est utilisée pour réduire l'intensité de la concurrence en prix.

Bouclage

$$p_1^* = c + \frac{\overline{q} - \underline{q}}{3} \quad \text{et} \quad p_2^* = c + \frac{2\left(\overline{q} - \underline{q}\right)}{3}$$

En choisissant la différenciation maximale les firmes obtiennent les prix les plus élevés possibles.

3. – La concurrence monopolistique

Concurrence monopolistique = grands nombre de vendeurs + produits différenciés

Notion introduite par Chamberlin [1933], *The theory of monopolistic competition*

Les firmes vendent des biens qui ne sont pas parfaitement homogènes MAIS sont fortement substituables.

Ces biens rendent essentiellement le même « service » mais se différencient : design, marque, packaging, service après vente, qualité, circuit de distribution, conditions de crédit, *etc.*

Les firmes présentes sur un marché de concurrence monopolistique forment une *industrie*

Chaque firme de cette industrie dispose de sa propre *clientèle i.e.* d'acheteurs qui préfèrent son produit à ceux des autres firmes

Situation intermédiaire entre la concurrence parfaite et le monopole :

- comme en concurrence parfaite il y a un grand nombre de producteurs
- contrairement à la concurrence parfaire l'identité du vendeur compte car les biens ne sont pas parfaitement homogènes, ce qui donne à chaque vendeur – comme en monopole – un pouvoir de marché

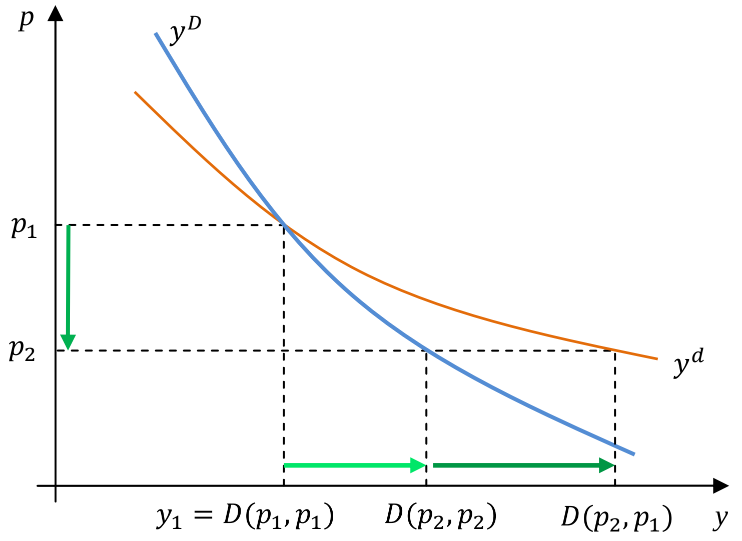
3.1. – La demande

Comment évolue la demande adressée à une firme, *i.e.* sa clientèle, lorsque cette firme décide de changer son prix ?

Prenons comme point de départ une situation dans laquelle toutes les firmes chargent le même prix p_1 et, la clientèle se répartissant uniformément sur les différentes firmes, vendent chacune y_1

Lorsqu'une firme décide de modifier son prix, on distingue généralement 2 courbes de demande (dualité de la demande) :

1. la **demande** y^d qui s'adresse à cette firme si ses concurrents maintiennent leurs prix au niveau antérieur p_1
2. la **demande** y^D qui s'adresse à cette firme si ses concurrents modifient leur prix de la même façon



Notons $D(p, \overline{p})$ la demande adressée à la firme quand elle fixe le prix p alors que ses concurrents fixent le prix $\overline{p}$.

Si la firme baisse son prix de p_1 à $p_2 < p_1$, la demande qui lui est adressée augmente davantage si les autres firmes conservent leur prix p_1 …que si elle baissent également leur prix à p_2 :

- de y_1 à $D(p_2, p_1)$ si ses concurrents ne changent pas leurs prix
- de y_1 à $D(p_2, p_2) < D(p_2, p_1)$ si ses concurrents ajustent également leurs prix

Deux effets jouent quand une firme baisse son prix de p_1 à $p_2 < p_1$:

- $y_1 \to D(p_2, p_2)$: hausse de la demande des consommateurs (augmentation de la taille du « gâteau »)
- $D(p_2, p_2) \to D(p_2, p_1)$: augmentation de la part de marché de la firme (augmentation de la part relative du « gâteau »)

3.2. – L'équilibre du marché

On distingue, comme en concurrence parfaite, l'équilibre de court terme (sans entrée) et l'équilibre de long terme (libre entrée)

3.2.1.– L'équilibre à court terme

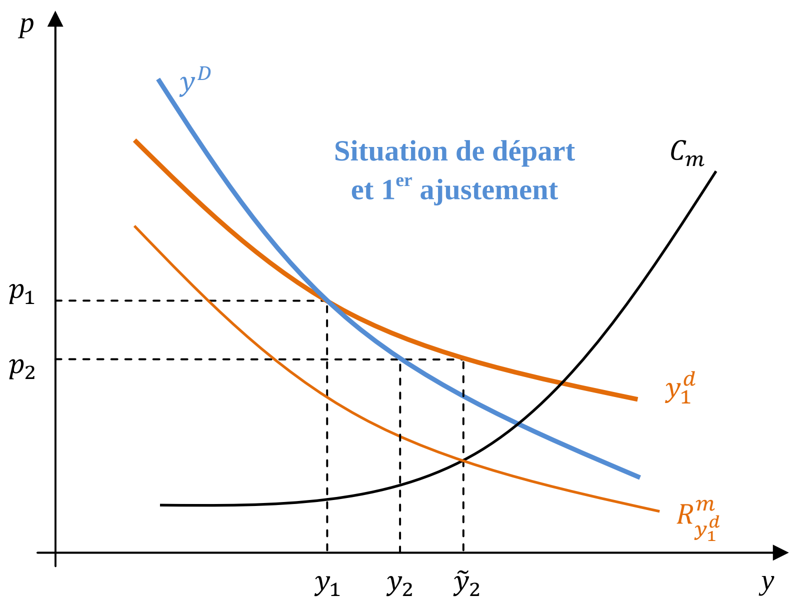
Court terme => nombre fixe de firmes dans l'industrie noté N

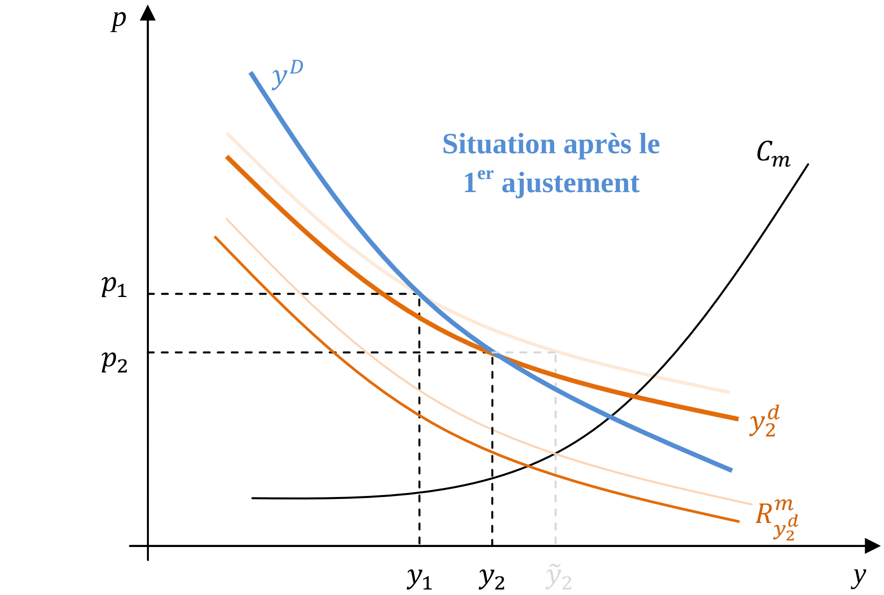
Chaque firme fixe le prix qui maximise son profit en considérant le prix des autres firmes comme donnés.

L'équilibre est obtenu quand aucune firme ne souhaite changer son prix de vente compte tenu de son objectif de maximiser son profit *i.e.* aucune firme n'a intérêt à changer unilatéralement de stratégie de prix (équilibre de NASH)

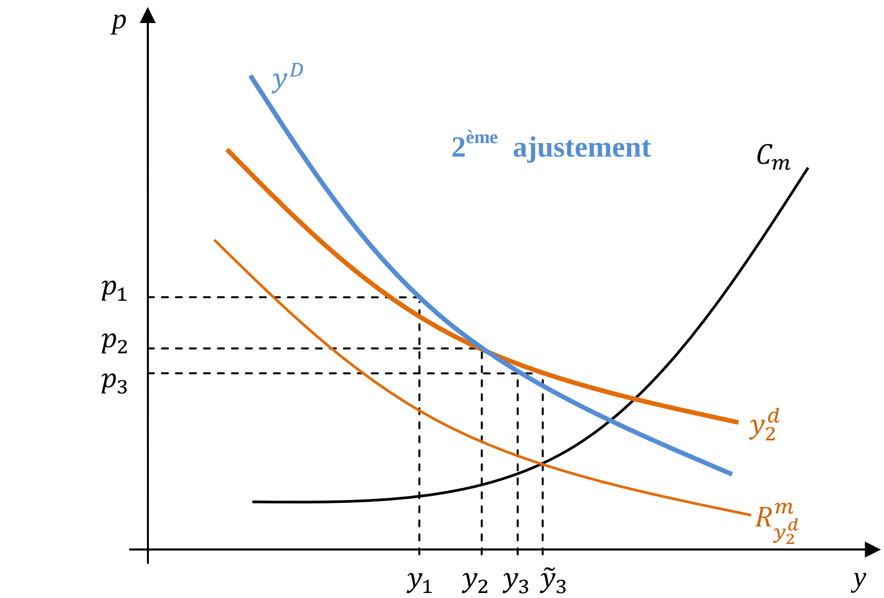
L'équilibre de court terme du marché peut être appréhendée comme l'aboutissement d'un processus de convergence ou l'entreprise ajuste de façon récurrente son prix de façon à maximiser son profit anticipé :

- Notons (p_1, y_1) la situation de départ.
- La firme se comporte alors comme un monopole et ajuste prix/quantités de façon à ce que $R^m_{y^d_1} = C_m$. Le prix chargé est alors p_2, prix auquel la firme anticipe de vendre $\tilde{y}_2$
- Les autres firmes faisant le même raisonnement la firme ne vend finalement que y_2 (1er graphique)
- La situation après ce premier ajustement est alors donnée par le 2ème graphique qui fournit un nouveau « point de départ »
- La firme ajuste de nouveau prix/quantités de façon à ce que $R^m_{y^d_2} = C_m$, anticipant de vendre $\tilde{y}_3$ au prix p_3… mais ne vendant finalement que y_3 (3ème graphique)
- *In fine* on obtient l'équilibre de court terme du marché (4ème graphique)

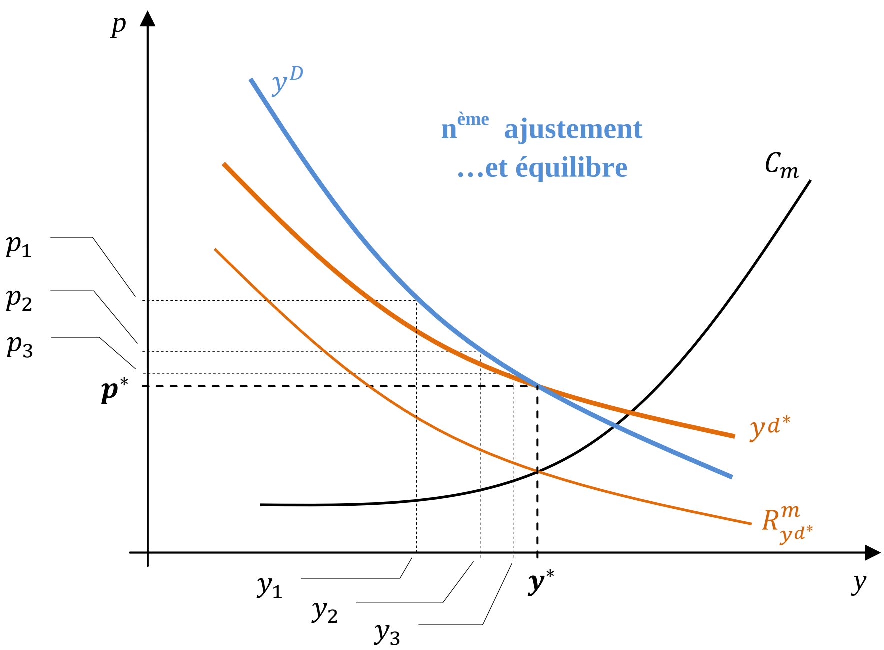




Situation après le 1er ajustement
p
y^D
C_m
p_1
p_2
y_2^d
$R^m_{y_2^d}$
y_1
y_2
$\tilde{y}_2$
y



2ème ajustement
p
y^D
C_m
p_1
p_2
p_3
y_2^d
$R^m_{y_2^d}$
y_1
y_2
y_3
$\tilde{y}_3$
y

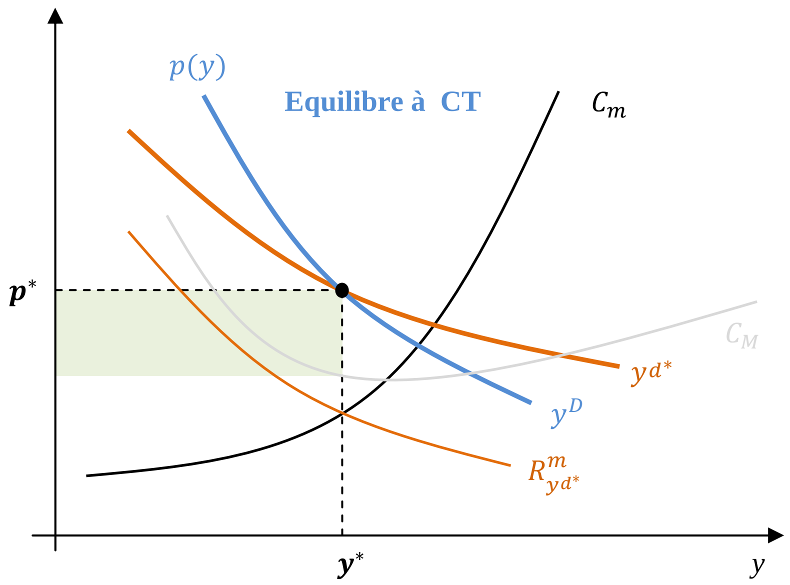


nème ajustement
…et équilibre
p
y^D
C_m
p_1
p_2
p_3
$\boldsymbol{p}^*$
y^{d*}
$R^m_{y^{d*}}$
y_1
y_2
y_3
$\boldsymbol{y}^*$
y

L'équilibre de court terme en concurrence monopolistique est une situation dans laquelle aucune entreprise n'a intérêt à modifier son prix et sa quantité produite, compte tenu des prix pratiqués par ses concurrents

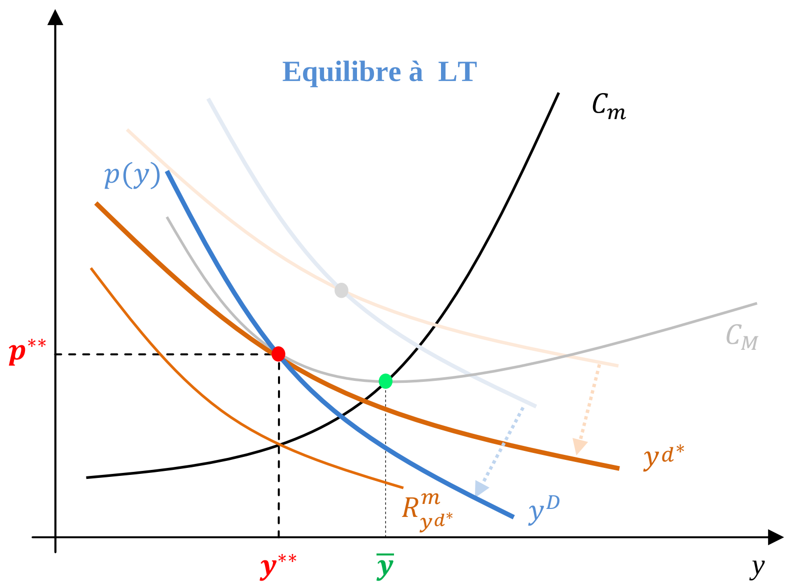
3.2.2. – De l'équilibre à court terme à l'équilibre à long terme

A court terme, les profits sont strictement positifs (en vert sur le graphique ci-dessous). Comme en concurrence parfaite, ces perspectives de profits positifs vont conduire de nouvelles firmes à entrer sur le marché.



L'entrée de nouvelles firmes sur le marché va alors se poursuivre tant que des opportunités de profits strictement positifs existent *i.e.* jusqu'à ce que le profit d'équilibre soit nul.

L'entrée de nouvelles firmes sur le marché engendre une diminution de la demande y^D qui s'adresse à chaque entreprise – et en conséquence un déplacement vers le bas de y^d et $R^m_{y^d}$ –, mouvement qui se poursuit jusqu'à ce que le profit soit nul (*cf.* graphique ci-dessous)



L'équilibre de concurrence monopolistique est caractérisé par une inefficacité productive puisque la quantité produite à l'équilibre ne permet pas de minimiser le coût moyen.

Il aurait été plus efficace que moins de firmes entrent sur le marché, chacune produisant davantage : $\overline{y}$ au lieu de y^{**}. Cela aurait permis d'éviter la multiplication excessive de coûts fixes de production et la présence à l'équilibre de gains potentiels non capturés.

La situation de concurrence monopolistique est donc caractérisée par une multiplication excessive des « marques » *i.e.* un trop grand nombre de produits différenciés offerts à l'équilibre par rapport à l'optimum social.

3.3. – Modélisation de la concurrence monopolistique

3.3.1. – Hypothèses

- n firmes dans une industrie, indicées par $i = 1, \dots, n$
- les firmes sont supposées identiques : $C(y_i) = cy_i + f$
- la demande adressée à une firme i quelconque s'écrit :

$$y_i^d = \frac{1}{n}(a - b\overline{p}) + d(\overline{p} - p_i) = y_i^d(p_i, \overline{p})$$

où $\overline{p} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} p_j$ représente la moyenne des prix dans l'industrie

Si une firme fixe un prix égal au prix moyen de l'industrie elle obtient un $n^{ième}$ de la demande totale $a - b\overline{p}$.

Si elle fixe un prix plus faible elle obtient un surcroit de demande proportionnel à l'écart au prix de l'industrie ; dans le cas symétrique elle subit une perte de demande proportionnelle à ce même écart.

3.3.2. – L'équilibre à court terme

Le programme d'une firme i quelconque s'écrit :

$$\begin{aligned}
\underset{\{y_i, p_i\}}{\text{Max}} \quad & \Pi_i = p_i y_i - C(y_i) \\
s.t. \quad & y_i^d = y_i^d(p_i, \overline{p}) = \frac{1}{n}(a - b\overline{p}) + d(\overline{p} - p_i) \\
& \overline{p} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{N} p_j \\
& C(y_i) = cy_i + f
\end{aligned}$$

qui se réécrit :

$$\underset{\{p_i\}}{\text{Max}} \quad \Pi_i = p_i\, y_i^d(p_i, \overline{p}) - c y_i^d(p_i, \overline{p}) - f$$

$$\text{où} \quad \overline{p} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{N} p_j$$

La condition du 1[er] ordre est alors :

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial p_i} = y_i^d(p_i, \overline{p}) + (p_i - c) \frac{\partial y_i^d}{\partial p_i} = 0$$

$$\text{avec} \qquad \frac{\partial y_i^d}{\partial p_i} = -d + \left(d - \frac{b}{N}\right) \underbrace{\frac{\partial \overline{p}}{\partial p_i}}_{1/n}$$

On a donc :

$$\frac{1}{n}\,(a - b\overline{p}) + d(\overline{p} - p_i) + (p_i - c)\left(-d + \frac{dn - b}{n^2}\right) = 0 \qquad \forall i = 1, \dots, N$$

Les firmes étant identiques on a nécessairement un équilibre symétrique : $p_i = \overline{p} = p^* \quad \forall i$

La condition d'optimalité précédente implique donc :

$$\frac{1}{n}\,(a - bp^*) + (p^* - c)\left(-d + \frac{dn - b}{n^2}\right) = 0$$

Dont la résolution donne le prix d'équilibre à court terme :

$$p^* = c + \underbrace{\frac{(a - bc)n}{b(1 + n) + dn(n - 1)}}_{\mathcal{Z}}$$

Le prix d'équilibre s'écrit ainsi :

$$p^* = c + \mathcal{Z}\left(\underset{-}{n}, \underset{-}{d}\right) > c$$

La marge unitaire $\mathcal{Z} > 0$ sur le coût variable est une fonction décroissante du nombre de firmes sur le marché et du degré de substitution entre les biens.

On remarque que :

- $\lim_{n \to \infty} p^* = c$: on retrouve le résultat de concurrence parfaite
- $\lim_{n \to 1} p^* = \frac{a + bc}{2b}$: on retrouve le résultat de monopole

La concurrence monopolistique est bien une situation intermédiaire entre les situations de concurrence parfaite et de monopole

3.3.3. – L'équilibre à long terme

Equilibre avec libre entrée : on cherche ici à déterminer le nombre n^* de firmes dans l'industrie à long terme.

Le profit réalisé par une firme *i* quelconque à l'équilibre de court terme est :

$$\Pi_i = (p^* - c)\, y_i^d(p^*, p^*) - f$$

- Si $f = 0$ *i.e.* s'il n'y a pas de coût fixe de production le profit d'équilibre est toujours positif. Un nombre infini de firmes entrent alors sur le marché. On a dans ce cas :

  - $n^* = +\infty$
  - Prix : $\lim_{n\to\infty} p^* = c$
  - Production d'une firme : $\lim_{n\to\infty} y_i^{d*} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(a - bc) = 0$
  - Production totale : $a - bc$

  On retrouve la situation de concurrence parfaite

- Si $f > 0$, le nombre de firmes entrant sur le marché est défini par la condition de nullité du profit :

$$\Pi_i = (p^* - c)\, y_i^d(p^*, p^*) - f = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (p^* - c)\left(\frac{a - bp^*}{n}\right) = f$$

En tenant compte de l'expression de p^*cette condition s'écrit :

$$\left(\frac{(a-bc)n}{b(1+n)+dn(n-1)}\right)\left(\frac{a}{n} - \frac{b}{n}\left(c + \frac{(a-bc)n}{b(1+n)+dn(n-1)}\right)\right) = f$$

Dont la résolution en n définit le nombre de firme n^* composant à long terme l'industrie.

Il suffit alors de reporter cette valeur dans l'expression de p^* pour obtenir le prix d'équilibre à long terme : $p^{**} = c + \mathcal{Z}\left(\underset{-}{n^*}, \underset{-}{d}\right)$