

### Exercice n°1 : Fonction de coûts (12 points)

Soit une firme produisant une quantité de bien  $y$  en utilisant deux inputs notés  $x_1$  et  $x_2$ , à partir de la fonction de production  $\mathcal{F}(x_1, x_2) = (x_1 \cdot x_2)^{1/6}$ . Le prix de vente du bien est noté  $p$  tandis que les prix des deux inputs sont supposés identiques et égaux à  $c = 1/2$ .

- 1) Ecrire le programme [P1] permettant de déterminer la fonction de coûts de la firme et ses demandes de facteurs conditionnelles (0,5)
- 2) Ecrire le lagrangien et les conditions du premier ordre associés à ce programme (1)
- 3) Identifier l'équation du sentier d'expansion? Interpréter cette équation et la représenter graphiquement (1)
- 4) Donner l'équation d'un isoquant et le représenter graphiquement (1)
- 5) Donner l'équation et représenter graphiquement une droite d'iso-coût de niveau  $C$  quelconque en indiquant le sens de coût croissant (1)
- 6) Résolvez graphiquement le programme [P1] de l'entreprise (1)
- 7) Montrer analytiquement qu'à l'optimum l'isoquant est tangent à la droite d'iso-coût (1)
- 8) Résoudre le programme [P1] et donner l'expression des demandes de facteurs conditionnelles (1)
- 9) Dédurre de la question précédente la fonction de coûts de l'entreprise (1)
- 10) Ecrire le programme [P2] permettant de déterminer l'offre de l'entreprise lorsqu'on connaît sa fonction de coût (0,5)
- 11) Ecrire la condition du premier ordre associée à ce programme (0,5)
- 12) Cette condition est-elle, dans le cas présent, suffisante? Pourquoi? (0,5)
- 13) Dédurre de cette condition la fonction d'offre de la firme et la représenter graphiquement (1)
- 14) Donner l'expression des demandes de facteurs de l'entreprise. Commentez (1)

### Exercice n°2 : Contrainte de débouchés (8 points)

Soit une firme produisant un bien en quantité  $y$  en utilisant un seul input  $x$ , à partir de la fonction de production  $\mathcal{F}(x) = 2\sqrt{x}$ . Le prix de vente du bien est noté  $p$  tandis que le prix du facteur de production est supposé unitaire.

- 1) Ecrire le programme [P3] permettant de déterminer simultanément l'offre de la firme et sa demande de facteur (0,5)
- 2) Ecrire le lagrangien et les conditions nécessaires du premier ordre associés à ce programme (1)
- 3) Ces conditions sont-elles suffisantes? Expliquez. (0,5)
- 4) Résoudre [P3] pour en déduire l'offre de bien de la firme et sa demande de facteur (1)
- 5) Représenter graphiquement l'optimum de la firme dans le plan  $(x, y)$  (1)
  - On suppose maintenant que la firme fait face à une contrainte de débouchés que l'on écrit  $y \leq 2$
- 6) Que se passe-t-il si  $p < 1$ ? Expliquer et représenter ce cas graphiquement. Quelles sont alors l'offre de bien et la demande de facteur de la firme (1,5)
- 7) Même question si  $p = 1$  (1)
- 8) Même question si  $p > 1$  (1,5)