Exercice n°1: Consommateur (10,5 points)

Soit un consommateur disposant d'un revenu R à dépenser pour l'achat de deux biens dont les prix sont notés $p_1 = 1$, $p_2 = 3$ et les quantités consommées $x_i,\ i = 1...2$. La fonction d'utilité représentant les préférences est donnée par : $U(x_1, x_2) = x_1 x_2^3$

1) Quelle est la signification économique de l'hypothèse de convexité stricte des préférences. Cette hypothèse est-elle vérifiée dans le cas présent ?

La convexité stricte des préférences signifie que le consommateur préfère les "mélanges". **(0,5 point)**

L'équation d'une courbe d'indifférence étant ici : $x_1 x_2^3 = U_0$ *i.e.* $x_1 = U_0 x_2^{-3} = \psi(x_2)$, on a $\psi''(x_2) = 12U_0 x_2^{-5} > 0$. Les préférences sont strictement convexes. **(0,5 point)**

2) Ecrire les conditions de Kuhn et Tucker que doit vérifier un vecteur $(x_1^\star, x_2^\star)$ qui réalise l'optimum du consommateur. Sont-elles suffisantes ?

Le programme s'écrit :

$Max_{\{x_1,x_2\}}\quad U(x_1, x_2)\quad st\quad p_1x_1 + p_2x_2 \le R$ **(0,5 point)**

Le Lagrangien est donc :

$L = U(x_1, x_2) + \lambda(R - p_1x_1 - p_2x_2)$

Et les conditions de Kuhn et Tucker:

$L_{x_1} = U_{x_1}(\cdot) - \lambda p_1 = 0$

$L_{x_2} = U_{x_2}(\cdot) - \lambda p_2 = 0$

$\lambda(R - p_1x_1 - p_2x_2) = 0$ **(0,5 point)**

Ces conditions sont nécessaires. Comme ici les préférences sont strictement convexes, elles sont également suffisantes **(0,5 point)**

3) Résoudre le système déterminé par les conditions nécessaires précédentes et déterminer les fonctions de demande marshaliennes x_1^*et x_2^*.

En résolvant on trouve: $x_1^* = \frac{R}{4p_1} = \frac{R}{4}$ et $x_2^* = \frac{3R}{4p_2} = \frac{R}{4}$ **(1,5 points)**

4) Programme permettant de déterminer la fonction de dépense du consommateur.

$Min_{\{x_1,x_2\}}\quad p_1x_1 + p_2x_2\quad st\quad U(x_1, x_2) \ge V$ **(1 point)**

5) Déterminer les fonctions de demandes hicksiennes, $\widetilde{x}_1$et $\widetilde{x}_2$ ainsi que la fonction de dépense que l'on notera $D(.)$.

Le Lagrangien est :

$L = p_1x_1 + p_2x_2 - \lambda(\mathcal{U}(x_1, x_2) - \mathcal{V})$

Et les conditions de Kuhn et Tucker:

$L_{x_1} = p_1 - \lambda U_{x_1}(\cdot) = 0$

$L_{x2} = p_2 - \lambda U_{x_2}(\cdot) = 0$

$\lambda(\mathcal{U}(x_1, x_2) - \mathcal{V}) = 0$ **(0,5 point)**

En résolvant ce système on trouve:

$\widetilde{x}_1 = \left(\frac{3p_1}{p_2}\right)^{-3/4}.V^{1/4} = V^{1/4}$ et $\widetilde{x}_2 = \left(\frac{3p_1}{p_2}\right)^{1/4}.V^{1/4} = V^{1/4}$ **(1,5 points)**

La fonction de dépense est alors simplement:

$D(p_1, p_2, \mathcal{V}) = p_1\widetilde{x}_1 + p_2\widetilde{x}_2 = 4V^{1/4}$ **(0,5 point)**

6) Ecrire le programme permettant, à partir de 5) de déterminer la fonction d'utilité indirecte du consommateur que l'on notera $V(.)$.

$Max_{\{\mathcal{V}\}}\quad V\quad st\quad D(p_1, p_2, \mathcal{V}) \le R$ **(1 point)**

7) Résoudre le programme précédent et en déduire la fonction d'utilité indirecte.

La solution de ce programme est donnée trivialement par la seule saturation de la contrainte:

$D(p_1, p_2, \mathcal{V}) = R$ i.e. $4V^{1/4} = R$

D'ou l'on tire l'expression de V: $V = \frac{R^4}{256}$ **(1 point)**

8) Expliquer comment à partir de 5) et 7) on peut facilement retrouver les demandes marshaliennes x_1^*et x_2^*.

Il suffit de reporter $V = \frac{R^4}{256}$ dans $\widetilde{x}_1 = .V^{1/4}$ et $\widetilde{x}_2 = .V^{1/4}$ pour obtenir x_1^* et x_2^* **(1 point)**

Exercice n°2 : Producteur (9,5 points)

Soit une firme produisant un bien y en utilisant deux inputs notés $x_1$et x_2, à partir de la fonction de production $F(x_1, x_2) = x_1^{1/3} x_2^{1/4}$ Le prix de vente du bien produit est noté p tandis que le prix de chaque input est supposé unitaire. On suppose que le facteur 1 est toujours variable, tandis que le facteur 2 est fixe à court terme, au niveau $x_2 = 1$, et variable uniquement à long terme.

1) Rappeler les conditions du second ordre du programme du producteur. Celles-ci sont-elles vérifiées dans le cas présent à court terme? à long terme ?

La fonction objectif *i.e.* la fonction profit doit être strictement concave. Cela est vérifié *ssi* la fonction de production est strictement concave *i.e.* si les rendements sont strictements décroissants ; dans le cas de fonctions de production homogènes il faut et il suffit que le degré d'homogénéité soit strictement inféreur à 1. Dans le cas présent le degré d'homogénéïté est de 1/3 à CT et de 1/3+1/4 = 7/12 à LT. Les conditions du second ordre sont donc satisfaites à CT et à LT. **(1 point)**

2) Programme déterminant la demande conditionnelle à court terme $\widetilde{x}_1^{CT}$de facteur 1?

Programme : $Min_{x_1}(x_1 + x_2) \;\; st \;\; x_1^{1/3} x_2^{1/4} \geq y$ **(1 point)**

3) Résoudre celui-ci et trouver $\widetilde{x}_1^{CT}$. En déduire la fonction de coût de court terme de la firme $C_{CT}(.)$

En résolvant on obtient : $\widetilde{x}_1^{CT} = y^3 x_2^{-3/4} = y^3$ **(1 point)**

Et donc : $C_{CT}(.) = y^3 x_2^{-3/4} + x_2 \; = y^3 + 1$ **(0,5 point)**

4) Utiliser cette dernière pour calculer l'offre de l'entreprise à court terme y_{CT}^S.

Programme : $Max_y \;\; py - C_{CT}(.)$ **(0,5 point)**

Condition n°1: $p = 3y^2 => y^* = (\frac{p}{3})^{1/2}$ **(0,5 point)**

Condition n°2 : $\prod = py^* - y^{*3} - 1 \geq 0 \quad ssi \quad p \geq (3^{-1/2} - 3^{-3/2})^{-2/3} = \overline{p}$ **(1 point)**

Finalement on a : $y_{CT}^S = (\frac{p}{3})^{1/2} \;\; si \;\; p \geq \overline{p}$ et $y_{CT}^S = 0$ sinon. Discontinuité de la fonction d'offre de CT à cause des coûts fixes. **(0,5 point)**

5) Ecrire maintenant le programme permettant de déterminer les demandes de facteurs conditionnelles à long terme, $\widetilde{x}_1^{LT}$et $\widetilde{x}_2^{LT}$.

Programme : $Min_{\{x_1,x_2\}}(x_1 + x_2) \;\; st \;\; x_1^{1/3} x_2^{1/4} \geq y$ **(0,5 point)**

6) Résoudre le programme précédent et trouver $\widetilde{x}_1^{LT}$et $\widetilde{x}_2^{LT}$. En déduire la fonction de coût de long terme de la firme $C_{LT}(.)$.

On obtient : $\widetilde{x}_1^{LT} = \left[\frac{3}{4}\right]^{-3/7} y^{12/7}$ et $\widetilde{x}_2^{LT} = \left[\frac{3}{4}\right]^{4/7} y^{12/7}$ **(1 point)**

Et donc : $C_{LT}(.) = \left[(\frac{3}{4})^{-3/7} + (\frac{3}{4})^{4/7}\right] y^{12/7} = Zy^{12/7}$ **(0,5 point)**

7) Utiliser cette dernière pour calculer l'offre de l'entreprise à long terme y_{LT}^S.

Programme : $Max_y \;\; py - C_{LT}(.)$ **(0,5 point)**

On obtient : $y_{LT}^S = \left[\frac{7}{12}\frac{p}{Z}\right]^{7/5}$ **(0,5 point)**

8) Expliquer comment, à partir des deux questions précédentes, on peut obtenir les demandes de facteurs à long terme de la firme: $x_1^{*\,LT}$et $x_2^{*\,LT}$.

Il suffit de remplacer dans $\widetilde{x}_1^{LT}$et $\widetilde{x}_2^{LT}$, y par y_{LT}^S. **(0,5 point)**