Université Evry-Val d'Essonne
2ème année de Licence − Cours de Microéconomie 2019-20 − T. Laurent
1ère session – Janvier 2020 − 1 heure 45 − Sans documents

Le symbole ✍ dans une question signifie que vous devez : écrire le programme, le lagrangien, donner la ou les conditions d'optimalité et résoudre. Le barème tient compte de la clarté et de la précision de l'exposition.

Exercice 1 (9pts)

Soit un consommateur dont les préférences, strictement convexes, sont représentées par la fonction d'utilité $\mathcal{U}(x_1,x_2)=x_1^3x_2$ où $x_i>0\ \ i=1{,}2$ représentent les quantités consommées. Le revenu du consommateur est noté $R>0$ et les prix des biens $p_i>0\ \ i=1{,}2$

1. – Calculer les demandes de biens marshaliennes ✍ **(3pts)**

Le programme permettant de déterminer les demandes marshaliennes s'écrit :

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{\{x_1,x_2\}} & \mathcal{U}(x_1,x_2) \\ s.c. & p_1x_1+p_2x_2\leq R \quad (\lambda\geq 0) \end{array}$$

$$\mathcal{L}=\mathcal{U}(x_1,x_2)+\lambda(R-p_1x_1-p_2x_2)$$

$$\begin{array}{ll} [1] & \mathcal{U}_{x_1}(\cdot)-\lambda p_1=0 \\ [2] & \mathcal{U}_{x_2}(\cdot)-\lambda p_2=0 \\ [3] & \lambda(R-p_1x_1-p_2x_2)=0 \end{array}$$

De [1] on tire $\lambda=\frac{U_{x_1}(\cdot)}{p_1}>0$ (puisque $U_{x_1}>0$ par l'hypothèse de non-satiété).

On a donc d'après [3] : $R-\ p_1x_1-\ p_2x_2=0$ [4]

La contrainte budgétaire est saturée.

En formant le rapport de [1] et [2], on a d'autre part :

$$\frac{U_{x_1}(\cdot)}{U_{x_2}(\cdot)}=\frac{p_1}{p_2} \quad i.e. \quad \frac{3x_2}{x_1}=\frac{p_1}{p_2}$$

soit $p_1x_1=3p_2x_2$. En reportant dans [4], on obtient alors immédiatement :

$$x_1^*=\frac{3R}{4p_1} \quad \text{et} \quad x_2^*=\frac{R}{4p_2}$$

2. – Comparer la part du revenu du consommateur consacrée à l'achat de bien 1 à celle consacrée à l'achat de bien 2. Expliquer **(1pt)**

On a : $p_1x_1^*=\frac{3}{4}R$ et $p_2x_2^*=\frac{1}{4}R$.

Le consommateur dépense 75% de son revenu pour acheter du bien 1 et 25% seulement pour acheter du bien 2 : sa dépense en bien 1 est le triple de celle en bien 2.

Ce résultat est lié aux préférences du consommateur telles qu'elles sont représentées par la fonction d'utilité $\mathcal{U}(x_1,x_2)=x_1^3x_2$: le « poids » du bien 1 dans l'utilité est trois plus grand que celui du bien 2.

3. – Calculer les demandes de biens hicksiennes ✍ **(3pts)**

Le programme permettant de déterminer les demandes hicksiennes s'écrit :

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{\{x_1,x_2\}} & p_1x_1 + p_2x_2 \\ s.c. & \mathcal{U}(x_1,x_2) \geq U \quad (\lambda \geq 0) \end{array}$$

où U est un niveau d'utilité donné *i.e.* exogène.

$$\mathcal{L} = p_1x_1 + p_2x_2 - \lambda(\mathcal{U}(x_1,x_2) - U)$$

$$\begin{array}{ll} [1] & p_1 - \lambda\mathcal{U}_{x_1}(\cdot) = 0 \\ [2] & p_2 - \lambda\mathcal{U}_{x_2}(\cdot) = 0 \\ [3] & \lambda(\mathcal{U}(x_1,x_2) - U) = 0 \end{array}$$

Comme $\mathcal{U}_{x_1} > 0$ par l'hypothèse de non satiété, on a d'après [1]: $\lambda = \frac{p_1}{\mathcal{U}_{x_1}} > 0$

D'après [3], on a donc : $\mathcal{U}(x_1,x_2) = U$ [4]

Et en formant le rapport $\frac{[1]}{[2]}$: $\frac{p_1}{p_2} = \frac{\mathcal{U}_{x_1}}{\mathcal{U}_{x_2}}$ [5]

En tenant compte de l'expression de $\mathcal{U}(\cdot)$, on obtient alors le système permettant de déterminer les demandes hicksiennes :

$$\begin{cases} x_1^3\, x_2 = U & [4] \\ p_1x_1 = 3p_2x_2 & [5] \end{cases}$$

Soit en résolvant :

$$\tilde{x}_1 = \left(\frac{3p_2}{p_1}\right)^{1/4} U^{1/4} \quad \text{et} \quad \tilde{x}_2 = \left(\frac{3p_2}{p_1}\right)^{-3/4} U^{1/4}$$

4. – On suppose les prix unitaires. Donner l'expression de la fonction de dépense. **(1pt)**

La fonction de dépense est :

$$\mathcal{D}(p_1,p_2,U) = p_1\tilde{x}_1(\cdot) + p_2\tilde{x}_2(\cdot) = \left(3^{1/4} + 3^{-3/4}\right) U^{1/4}$$

5. – Que représente-t-elle ? **(1pt)**

La fonction de dépense représente la dépense minimale que doit consentir le consommateur pour atteindre un niveau d'utilité U donné, compte tenu des prix des biens $p_1 = p_2 = 1$

Exercice 2 **(11pts)**

On considère une firme en situation de concurrence parfaite produisant un bien en quantité Y, qu'elle vend au prix $p > 0$, en utilisant deux inputs de prix $c_1 = 4$ et $c_2 = 3$ qu'elle achète en quantités x_1 et x_2. La fonction de production est $F(x_1,x_2) = x_1{}^{1/3}\, x_2{}^{1/4}$

1. – Déterminer la nature des rendements d'échelles. En quoi cela est-il important ? **(1pt)**

$F(x_1,x_2)$ est homogène de degré $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} < 1$. Les rendements d'échelle sont donc strictement décroissants ce qui assure la stricte concavité de la fonction de production et donc de la fonction profit. La condition du second ordre du programme de la firme est ainsi vérifiée et les conditions nécessaires du 1er ordre sont également suffisantes.

2. – Déterminer les demandes de facteurs conditionnelles et la fonction de coûts de la firme ✍ **(5pts)**

Le programme permettant de déterminer la fonction de coûts s'écrit :

$$\begin{array}{ll} \text{Min}\limits_{\{x_1,\,x_2\}} & C = c_1x_1 + c_2x_2 \\ s.t. & F(x_1,\,x_2) \geq Y \quad (\lambda \geq 0) \end{array}$$

où le niveau de production à réaliser, Y, est une variable exogène

Le lagrangien associé à ce problème est :

$$L = c_1 x_1 + c_2 x_2 - \lambda(F(x_1, x_2) - Y)$$

Et les conditions du 1er ordre sont données par le système de 3 équations à 3 inconnues (x_1, x_2 et λ)

$$c_1 = \lambda F_{x_1}(\cdot) \qquad [1]$$

$$c_2 = \lambda F_{x_2}(\cdot) \qquad [2]$$

$$\lambda(F(x_1, x_2) - Y) = 0 \qquad [3]$$

De [1] on tire $\lambda = \frac{c_1}{F_{x_1}(\cdot)} > 0$

D'après [3] on a donc : $F(x_1, x_2) = Y$ [4]

En formant le rapport $\frac{[1]}{[2]}$ on obtient d'autre part : $\frac{F_{x_1}(\cdot)}{F_{x_2}(\cdot)} = \frac{c_1}{c_2}$ [5]

Comme $F(x_1, x_2) = {x_1}^{1/3}\, {x_2}^{1/4}$, $c_1 = 4$ et $c_2 = 3$, le système [4]–[5] s'écrit :

$${x_1}^{1/3}\, {x_2}^{1/4} = Y$$

$$x_1 = x_2$$

La résolution en x_1 et x_2 de ce système de 2 équations à 2 inconnues (Y est ici exogène) donne les demandes de facteurs conditionnelles :

$$\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = Y^{\,12/7}$$

La fonction de coûts est alors $C(x_1, x_2 \mid c_1, c_2) = c_1 \tilde{x}_1 + c_2 \tilde{x}_2 = 7Y^{\,12/7} = \mathbb{C}(Y)$

3. – Utiliser la fonction de coûts pour déterminer la fonction d'offre de la firme **(3pts)**

On cherche ici le niveau optimal de production. Le problème s'écrit sous la forme du programme sans contrainte :

$$\underset{\{Y\}}{\text{Max}} \;\; \Pi(Y) = pY - \mathbb{C}(Y)$$

La solution est définie par :

$$\Pi'(Y) = p - \mathbb{C}'(Y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p = 12\, Y^{\,5/7}$$

La résolution en Y de cette équation donne directement l'offre de la firme : $Y^* = \left(\frac{p}{12}\right)^{7/5}$

4. – Déduire de la question précédente les demandes de facteurs de l'entreprise **(2pts)**

En reportant le niveau de production optimal Y^* dans les demandes de facteurs *conditionnelles* $\tilde{x}_1$ et $\tilde{x}_2$, on obtient les demandes de facteurs de l'entreprise

$$x_1^* = x_1^* = Y^{*12/7} = \left(\frac{p}{12}\right)^{12/5}$$