Dépenses militaires, croissance et bien être : une simulation de l'impact macroéconomique de la R&D défense*†

Thierry LAURENT ‡
Centre d'Etude des Politiques Economiques (EPEE)
FR CNRS n°3126 : Travail, Emploi et Politiques publiques (TEPP)
Université d'Evry-Val d'Essonne & UniverSud PARIS

January 11, 2013

Abstract

L'article propose une évaluation pour la France de l'impact à long terme de la R&D défense sur la croissance et le bien être *via* la construction puis la simulation d'un modèle d'équilibre général dynamique avec croissance endogène. Les résultats des simulations effectuées sur l'économie française soulignent l'importance du rôle joué par les investissements publics en R&D défense dans la détermination à long terme du taux de croissance.

JEL: H23, H51, I18, O31.

Keywords: Défense, R&D militaire, dépense publique, croissance endogène

1 Introduction

L'investissement public en R&D défense représente 0.25% du PIB en France contre 0.43% aux Etats-Unis. Exprimée en pourcentage de l'ensemble des taxes cette même grandeur est presque quatre fois plus importante aux Etats-Unis qu'en France :1.8% aux USA contre 0.5% en France. Pourquoi une telle différence ? Nos gouvernements ne sous-estiment-ils pas le rôle joué par la R&D militaire et son impact sur la productivité et la croissance?

Les travaux théoriques consacrés à l'analyse des effets de la dépense militaire sur la croissance identifient trois canaux par lesquels les dépenses militaires influencent le PIB: *(i)* un effet keynésien de multiplicateur de dépenses publiques (*cf.* Dakurah & *alii* [2001]), *(ii)* un effet "offre" décrivant l'impact des dépenses militaires sur l'efficacité du processus de production *via* le jeu des externalités liées aux innovations technologiques militaires, *(iii)* un effet "sécurité" soulignant le rôle joué par la défense nationale pour assurer la

*L'auteur remercie Stefano Bosi pour son aide, ses commentaires et ses patientes relectures, ainsi que Ferhat Mihoubi dont l'appui a permi d'améliorer la qualité des simulations présentées. Bien entendu les erreurs et omissions ne peuvent leur être imputées.

†Compte tenu de leur volume important les annexes ne sont pas directement attachées à l'article mais sont téléchargeables à l'adresse suivante : www.thierry-laurent.net

‡EPEE, Centre d'Etude des Politiques Economiques, Fédération de Recherche Travail, Emploi et Politiques publiques – FR CNRS n°3126, Département d'Economie, Université d'Evry Val d'Essonne, 4 bd. François Mitterrand, 91025 Evry cedex, France. Mail : laurent@univ-evry.fr

sécurité des biens et des personnes et l'impact positif d'un tel contexte sur l'incitation à investir (*cf.* par exemple Aizenman & Glick [2003]).

L'objet de ce travail est d'étudier l'impact sur la croissance et le bien être d'une composante spécifique des dépenses militaires : la R&D défense. Les premiers travaux ayant cherché à modéliser, dans un cadre dynamique, les effets macroéconomiques de cette composante particulière des dépenses militaires, se sont développés à la suite des nouvelles théories de la croissance ; deux effets fondamentaux ont alors été mis en avant : *(i)* d'une part la R&D défense améliore la qualité du service national de défense fourni par l'armée et donc le bien être global, *(ii)* d'autre part elle augmente le stock des connaissances scientifiques et techniques, accroissant ainsi l'efficacité du processus de production.

Le premier mécanisme affecte directement la fonction d'utilité du consommateur tandis que le second affecte la fonction de production agrégée. La R&D défense, *via* le processus de diffusion des innovations exerce un effet d'entrainement du secteur militaire sur l'ensemble du secteur productif ; cette externalité positive constitue un facteur productif "hors marché" engendrant rendements croissants et croissance endogène.

Si l'introduction du service de défense dans la fonction d'utilité est une idée ancienne [1], l'effet d'offre à long terme de la R&D défense a été moins étudié et seuls quelques articles théoriques modélisent l'impact de la R&D militaire en tant que facteur externe de croissance. Dans la lignée de Barro [1990], Shieh & *alii* [2002] proposent ainsi un modèle dynamique d'équilibre général où la dépense militaire – recherche et infrastructures – constitue un effet externe dopant la fonction de production et générant une croissance auto-entretenue. Prolongeant ce modèle, Bosi & laurent [2006] analysent l'impact macroéconomique des dépenses de R&D défense à travers leur double effet sur la fonction d'utilité des ménages – *via* la production du service de défense – et sur la fonction de production agrégée en tant qu'externalité[2].

Le cadre du présent travail prolonge l'article de Bosi & Laurent [2006], en intégrant en plus des dépenses publiques de R&D militaire les dépenses privées de R&D civile, permettant ainsi de les mettre en concurrence du point de vue de leur impact sur la croissance et le bien être.

2 Modélisation

Le modèle utilisé est un modèle dynamique d'équilibre général avec croissance endogène distingant quatre composantes de la dépense publique : investissement en R&D défense, autres dépenses de défense, investissement public civil, consommation publique civile. Il permet d'une part de rendre compte de l'impact de la R&D défense *(i)* sur la production traditionnelle d'un service de défense intervenant dans la fonction d'utilité, *(ii)* sur la fonction de production agrégée (externalité) et *(iii)* sur la productivité de la R&D civile, d'autre part de distinguer investissements de R&D civile (financés par des fonds privés) et investissement de R&D défense (financés par les dépenses publiques).

La distinciton opérée entre R&D civile (privée) et R&D militaire (publique) permet d'identifier les effets macroéconomiques des deux types de R&D et de comparer, par exem-

[1] *cf.* par exemple Van der Ploeg & Zeeuw, [1990], Zou, [1995], Chang & *alii* [1996]

[2] Le lecteur pourra se reporter à l'introduction de cet article pour une présentation plus développée de la littérature sur le lien entre dépenses militaires et croissance.

ple, l'efficacité de mesures ciblées de soutient à la R&D militaire et de mesures d'incitation à la R&D civile.

Les dépenses de R&D militaire, affectent directement la fonction de production (comme la R&D privée civile) mais également indirectement l'investissement en R&D civile privée. Symétriquement la R&D civile privée impacte le revenu global et donc indirectement, toutes choses égales par ailleurs, les recettes fiscales et l'investissement public en R&D militaire. La suite de la section est consacrée à la présentation du cadre général du modèle et du comportement des agents : Etat, ménages et entreprises.

2.1 Ménages

Ils ont une durée de vie infinie pendant laquelle ils consomment à chaque période, un bien de consommation privé noté c, un bien de consommation public noté b et un service public de défense nationale noté e. Le niveau d'utilité obtenu par le ménage représentatif durant toute sa vie est donné par la fonction d'utilité intertemporelle :

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[u\left(c_t\right) + v\left(b_t\right) + w\left(e_t\right)\right] \tag{1}$$

où $0 < \beta \equiv 1/\left(1+i\right) < 1$ représente le facteur d'escompte et $i > 0$ le taux de préférence pour le présent.

L'ensemble des dépenses militaires est divisé en deux composantes : les dépenses militaires "traditionnelles" et les dépenses de R&D. Considérées comme des stocks accumulables ces deux éléments, notés n et m sont utilisés conjointement pour produire le bien de défense nationale $e_t \equiv e\left(m_t, n_t\right)$; la fonction $e\left(.\right)$ est supposée présenter des rendements d'échelle constants. A chaque periode le ménage représentatif est confronté à la contrainte budgétaire :

$$c_t + k_{t+1} - \Delta_k k_t + p_{t+1} - \Delta_p p_t \leq \left(1-\tau_k\right) r_{kt} k_t + \left(1-\tau_p\right) r_{pt} p_t + \left(1-\tau_l\right) \omega_t l_t \tag{2}$$

où $\delta_i \equiv 1 - \Delta_i$, avec $i = k, p$, représente le taux de dépréciation du capital et de la R&D privée entre deux périodes.

Le terme de gauche de l'équation (2) représente les dépenses nettes de consommation et d'investissement (k désignant le stock de capital privé et p le stock de R&D privée) tandis que le terme de droite représente le revenu disponible (avec r_k et r_p les taux de rendements réels du capital et de la R&D privée, ω le taux de salaire réel et τ_k, τ_p, τ_l les taux d'imposition respectifs des revenus du capital, de la R&D privée et du travail)[3].

L'offre de travail est supposée, de façon standard, inélastique et normalisée à l'unité :[4] $l_t = 1$. Dans un tel contexte le problème du consommateur est de maximiser sa fonction d'utilité intertemporelle (1) par rapport aux variables endogènes k_t, p_t et c_t sous les contraintes (2). En dérivant la fonction de Lagrange du problème par rapport aux variables de contrôle, les conditions du premier ordre permettent – après élimination des

[3] Le gouvernement peut donc réduire le taux d'imposition spécifique des revenus de la R&D privée s'il souhaite inciter les agents privés à accroître leurs investissements en R&D.

[4] Une approche plus générale pourrait inclure l'offre de travail dans la fonction d'utilité des ménages. Cependant, cette hypothèse, tout en compliquant la résolution analytique du modèle, ne changerait pas les résultats principaux et les conclusions sur le rôle de la recherche militaire.

multiplicateurs – d'obtenir la condition de non-arbitrage ci-dessous (condition statique d'équilibre),

$$\Delta_k + (1-\tau_k)\, r_{kt} = \Delta_p + (1-\tau_p)\, r_{pt} \tag{3}$$

ainsi que la condition d'optimalité dynamique (équation d'Euler),

$$\frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+1})} = \beta\left[\Delta_k + (1-\tau_k)\, r_{kt+1}\right] \tag{4}$$

La contrainte budgétaire (2), est bien sûr nécessairement saturée à l'optimum. La solution du problème doit en plus respecter la condition de transversalité suivante :

$$\lim_{t\to\infty} \lambda_t\,(k_{t+1} + p_{t+1}) = 0 \tag{5}$$

Afin de simplifier les calculs nous supposons enfin que les élasticités de substitution intertemporelle de la consommation sont constantes.

Hypothèse 1. *Les fonctions d'utilité sont de type CIES :*

$$h(x) \equiv c_h \frac{x^{1-1/\varepsilon_h}-1}{1-1/\varepsilon_h} \text{ si } \varepsilon_h \neq 1;\ h(x) \equiv c_h \ln x \text{ si } \varepsilon_h = 1 \tag{6}$$

où $h \equiv u, v, w$ *et sans perte de généralité* $c_u + c_v + c_w = 1$.

2.2 Entreprises

L'état de la technologie est représenté par une fonction de production à six inputs : trois variables de choix pour l'entreprise (le capital privé k, le stock de connaissances issues des investissements en R&D civile p, le travail l) et trois externalités (le stock de capital public a, le stock de connaissances issues des investissements publics en R&D militaire m, et le stock de connaissances issues des investissements en R&D civile des autres firmes $\bar{p}$). Le capital public est le stock accumulé des dépenses publiques courantes et passées porteuses d'externalités productives – éducation, infrastructures civiles (routes, aéroports, réseaux câblés *etc.*) – et joue le rôle d'une externalité productive. De leur côté les dépenses publiques de R&D militaire accumulées affectent également la productivité globale *via* une externalité de R&D classique (*spillovers* du secteur de la défense vers le secteur civil).

Plusieurs hypothèses usuelles sont faites sur la technologie afin de simplifier les calculs.

Hypothèse 2. *(i) La fonction de production* $F(k,p,l,a,m,\bar{p})$ *est à rendements constants par rapport aux trois facteurs de production que sont le capital, la R&D civile privée et le travail :* $F(\mu k,\mu p,\mu l,a,m,\bar{p}) = \mu F(k,p,l,a,m,\bar{p})$, *(ii) La fonction de production intensive* $\tilde{f}(\kappa,\pi,a,m,\bar{p}) \equiv F(\kappa,\pi,1,a,m,\bar{p})$, *où* $\kappa \equiv k/l$ *et* $\pi \equiv p/l$, *est homogène de degré un par rapport à ses arguments :* $\tilde{f}(\mu\kappa,\mu\pi,\mu a,\mu m,\mu\bar{p}) = \mu\tilde{f}(\kappa,\pi,a,m,\bar{p})$

Le problème du producteur est de maximiser son profit par rapport aux variables de contrôle – stock de capital k_t, R&D p_t et niveau d'emploi l_t – en considérant toutes les externalités – *i.e.* a, m et $\bar{p}$ – comme constantes :

$$\max_{k_t,p_t,l_t} F(k_t,p_t,l_t,a_t,m_t,\bar{p}_t) - r_{kt}k_t - r_{pt}p_t - \omega_t l_t$$

L'équilibre de la firme est alors défini de façon traditionnelle par l'égalité entre le coût réel de chaque facteur et sa productivité, $r_{kt} = F_k(\cdot), r_{pt} = F_p(\cdot)$ et $\omega_t = F_l(\cdot)$, égalités qui peuvent être réécrites en termes de fonction de production intensive :

$$\begin{aligned} r_{kt} &= \tilde{f}_\kappa(\kappa_t, \pi_t, a_t, m_t, \bar{p}_t) \\ r_{pt} &= \tilde{f}_\pi(\kappa_t, \pi_t, a_t, m_t, \bar{p}_t) \\ \omega_t &= \tilde{f}(\kappa_t, \pi_t, a_t, m_t, \bar{p}_t) - \kappa_t \tilde{f}_\kappa(\kappa_t, \pi_t, a_t, m_t, \bar{p}_t) - \pi_t \tilde{f}_\pi(\kappa_t, \pi_t, a_t, m_t, \bar{p}_t) \end{aligned} \tag{7}$$

2.3 Gouvernement

Le stock de capital public g est constitué du capital productif a (physique et humain provenant de l'accumulation des investissements dans les réseaux publics d'infrastructures, dans l'éducation *etc.)*, de la consommation publique accumulée b – dont une partie est supposée durable et donc accumulable –, du stock m des connaissances accumulées issues des investissements en R&D militaire et des autres dépenses militaires accumulées n (armes, bâtiments, superstructures, *etc.*) : $g_t \equiv a_t + b_t + m_t + n_t$. La contrainte budgétaire de l'Etat à une période t quelconque est alors donnée par :

$$a_{t+1} - \Delta_a a_t + b_{t+1} - \Delta_b b_t + m_{t+1} - \Delta_m m_t + n_{t+1} - \Delta_n n_t \leq \tau_k r_{kt} k_t + \tau_p r_{pt} p_t + \tau_l \omega_t l_t \tag{8}$$

où $\delta_i \equiv 1 - \Delta_i$ est le taux de dépréciation du capital public de type i, le terme de droite de (8) representant le montant total des recettes fiscales.

Dans un tel contexte, la politique économique de l'Etat est complètement décrite par le vecteur des taux d'imposition (τ_k, τ_p, τ_l) et la ventilation du "capital" public dans ses quatre composantes,

$$(\sigma_a, \sigma_b, \sigma_m, \sigma_n) \equiv (a_t/g_t, b_t/g_t, m_t/g_t, n_t/g_t) \tag{9}$$

avec évidemment: $$\sigma_a + \sigma_b + \sigma_m + \sigma_n = 1 \tag{10}$$

En utilisant les parts budgétaires (9) et la contrainte budgétaire de l'Etat, l'équation (8) se réécrit identiquement :

$$\begin{aligned} & \sigma_a(g_{t+1} - \Delta_a g_t) + \sigma_b(g_{t+1} - \Delta_b g_t) + \sigma_m(g_{t+1} - \Delta_m g_t) + \sigma_n(g_{t+1} - \Delta_n g_t) \\ = \; & g_{t+1} - (\sigma_a \Delta_a + \sigma_b \Delta_b + \sigma_m \Delta_m + \sigma_n \Delta_n) g_t \quad \leq \quad \tau_k r_{kt} k_t + \tau_p r_{pt} p_t + \tau_l \omega_t l_t \end{aligned}$$

soit, de façon équivalente :

$$g_{t+1} - \Delta g_t \leq \tau_k r_{kt} k_t + \tau_p r_{pt} p_t + \tau_l \omega_t l_t \tag{11}$$

où le taux de dépréciation de la dépense publique peu être vu comme une moyenne pondérée des différents taux de dépréciation spécifiques :

$$\Delta \equiv \sigma_a \Delta_a + \sigma_b \Delta_b + \sigma_m \Delta_m + \sigma_n \Delta_n \tag{12}$$

On remarque ici que la décomposition budgétaire traditionnelle du montant total des dépenses publiques en ses quatre postes – investissement civil, consommation publique, investissement en R&D militaire et autres dépenses militaires – s'écrit simplement :

$$(\tilde{\sigma}_a, \tilde{\sigma}_b, \tilde{\sigma}_m, \tilde{\sigma}_n) \equiv \left(\frac{a_{t+1} - \Delta_a a_t}{g_{t+1} - \Delta g_t}, \frac{b_{t+1} - \Delta_b b_t}{g_{t+1} - \Delta g_t}, \frac{m_{t+1} - \Delta_m m_t}{g_{t+1} - \Delta g_t}, \frac{n_{t+1} - \Delta_n n_t}{g_{t+1} - \Delta g_t} \right)$$
$$\text{avec} \quad \tilde{\sigma}_a + \tilde{\sigma}_b + \tilde{\sigma}_m + \tilde{\sigma}_n = 1$$

3 Equilibre

L'équilibre sur le marché du travail étant caractérisé par une offre de travail inélastique unitaire, l'équilibre général du modèle requiert l'équilibre sur les marchés des biens et des facteurs. Toutes les firmes (concurrentielles) étant identiques, on a à l'équilibre $\bar{p}_t = p_t = \pi_t$ et, puisque $l_t = 1$:

$$r_{kt}k_t + r_{pt}p_t + \omega_t l_t = r_{kt}\kappa_t + r_{pt}\pi_t + \omega_t = \tilde{f}\left(\kappa_t, \pi_t, a_t, m_t, \pi_t\right) \equiv f\left(\kappa_t, \pi_t, a_t, m_t\right)$$

Notons que $f\left(\kappa, \pi, a, m\right)$ est toujours homogène de degré 1 et que : $f_\kappa\left(\kappa, \pi, a, m\right) = \tilde{f}_\kappa\left(\kappa, \pi, a, m, \pi\right)$. Définissons maintenant les cinq élasticités[5],

$$\begin{aligned}
s_{kt} &\equiv \frac{f_\kappa\left(\kappa_t, \pi_t, a_t, m_t\right)\kappa_t}{f\left(\kappa_t, \pi_t, a_t, m_t\right)} = \frac{r_{kt}\kappa_t}{f\left(\kappa_t, \pi_t, a_t, m_t\right)}, \\
s_{pt} &\equiv \frac{\tilde{f}_\pi\left(\kappa_t, \pi_t, a_t, m_t, \bar{p}_t\right)\pi_t}{\tilde{f}\left(\kappa_t, \pi_t, a_t, m_t, \bar{p}_t\right)} = \frac{r_{pt}\pi_t}{f\left(\kappa_t, \pi_t, a_t, m_t\right)} \\
s_{\pi t} &\equiv \frac{f_\pi\left(\kappa_t, \pi_t, a_t, m_t\right)\pi_t}{f\left(\kappa_t, \pi_t, a_t, m_t\right)} = 1 - s_{kt} - s_{at} - s_{mt} \\
s_{at} &\equiv \frac{f_a\left(\kappa_t, \pi_t, a_t, m_t\right)a_t}{f\left(\kappa_t, \pi_t, a_t, m_t\right)}, \quad s_{mt} \equiv \frac{f_m\left(\kappa_t, \pi_t, a_t, m_t\right)m_t}{f\left(\kappa_t, \pi_t, a_t, m_t\right)}
\end{aligned}$$

où les deux premières sont les parts respectives des revenus du capital et de la R&D privée dans le revenu total.

En supposant sans perte importante de généralité $\Delta_p = \Delta_k = \Delta$ **(Hypothèse 3)** et en supposant constantes les élasticités de la production par rapport aux inputs $\left(s_{kt}, s_{pt}, s_{at}, s_{mt}\right) = \left(s_k, s_p, s_a, s_m\right)$ (**Hypothèse 4**), on obtient finalement après quelques calculs (*cf.* annexe 9.1) :

$$\begin{aligned}
\left[\Delta + \tau\varphi\left(x_t\right)\right]\frac{y_{t+1}}{y_t} &= \left(\beta\left[\Delta_k + \left(1 - \tau_k\right)\frac{s_k}{s_k + s_\pi}\varphi'\left(x_{t+1}\right)\right]\right)^{\varepsilon_u} && (13) \\
y_t + \left(1 + \frac{1 - \tau_p}{1 - \tau_k}\frac{s_p}{s_k}\right)\left(\Delta x_{t+1} - \Delta_k x_t\right) &= \left[1 - \tau - \left(1 + \frac{1 - \tau_p}{1 - \tau_k}\frac{s_p}{s_k}\right)\tau x_{t+1}\right]\varphi\left(x_t\right) && (14)
\end{aligned}$$

où τ représente le taux de pression fiscale de l'économie, défini comme la moyenne pondérée des taux d'imposition spécifiques,

$$\tau \equiv s_k\tau_k + s_p\tau_p + \left(1 - s_k - s_p\right)\tau_l \qquad (15)$$

et :

$$\begin{aligned}
y_t &\equiv c_t/g_t, \qquad \gamma_t \equiv g_{t+1}/g_t, \qquad x_t \equiv \frac{\kappa_t}{g_t} \\
\varphi\left(x_t\right) &\equiv f\left(x_t, \frac{1 - \tau_p}{1 - \tau_k}\frac{s_{pt}}{s_{kt}}x_t, \sigma_a, \sigma_m\right), \qquad s_\pi = 1 - s_k - s_a - s_m
\end{aligned}$$

4 Dynamique

Les deux équations (13)-(14) constituent un système dynamique de dimension 2 en $\left(x_t, y_t\right)$ où x_t – contrairement à y_t – est une variable prédéterminée (décidée à la période précédente).

[5] Ces quatre paramètres sont constants dans le cas Cobb-Douglas.

4.1 Etat stationnaire

Afin de calculer l'état stationnaire de l'économie, on omet les indices de temps dans (13)-(14) et on résoud le système :

$$\begin{aligned}\gamma &= \Delta + \tau\varphi(x) = \left(\beta\left[\Delta_k + (1-\tau_k)\frac{s_k}{s_k+s_\pi}\varphi'(x)\right]\right)^{\varepsilon_u} && (16)\\ y &= \left(1+\frac{1-\tau_p}{1-\tau_k}\frac{s_p}{s_k}\right)(\Delta_k-\Delta)\,x + \left[1-\tau-\left(1+\frac{1-\tau_p}{1-\tau_k}\frac{s_p}{s_k}\right)\tau x\right]\varphi(x) && (17)\end{aligned}$$

La croissance étant équilibrée (les arguments habituels de la litérature sur la croissance endogène s'appliquent) : $\gamma \equiv g_{t+1}/g_t = c_{t+1}/c_t = k_{t+1}/k_t = p_{t+1}/p_t$. En remarquant que $\lambda_t = \beta^t u'(c_t)$ et en utilisant (6), la condition de transversalité (5) devient $\lim_{t\to\infty} c_u c_0^{-1/\varepsilon_u}(k_0+p_0)\,\gamma\left(\beta\gamma^{1-1/\varepsilon_u}\right)^t = 0$ *i.e.* $\beta\gamma^{1-1/\varepsilon_u} < 1$. On a donc d'après (16) $\gamma < \Delta_k + \rho$ où $\rho \equiv (1-\tau_k)\,r_k = (1-\tau_k)\frac{s_k}{s_k+s_\pi}\varphi'(x)$ est le taux de rendement du capital après impôt.

4.2 Dynamique locale

On montre dans cette section que l'équilibre de l'économie est unique et constitue une trajectoire selle convergeant vers l'équilibre stationnaire. Le point de départ de la trajectoire d'équilibre est défini par la variable prédéterminée x_0, le saut de la variable y_0 permettant d'assurer que le point de départ appartient bien à la trajectoire selle convergeante, seule solution soutenable à long terme[6]. Afin d'étudier la dynamique locale et de montrer la stabilité du point selle, on procède à une linéarisation du système dynamique au voisinage de l'état stationnaire.

En différenciant l'équation (13) par rapport aux variables dynamiques $(x_{t+1}, y_{t+1}, x_t, y_t)$ et en utilisant (16-17), on obtient,

$$\gamma\varepsilon_u\frac{\rho}{\rho+\Delta_k}\frac{x\varphi''}{\varphi'}\frac{dx_{t+1}}{x} - \gamma\frac{dy_{t+1}}{y} = \tau\varphi' x\frac{dx_t}{x} - \gamma\frac{dy_t}{y} \tag{18}$$

où les différentielles sont relatives à l'état stationnaire.

En linéarisant maintenant l'équation (14) au voisinage de l'état stationnaire, il vient :

$$\eta\gamma\frac{dx_{t+1}}{x} = \left[\eta\left(\Delta_k - \tau x\varphi'\right) + (1-\tau)\,\varphi'\right]\frac{dx_t}{x} - \frac{y}{x}\frac{dy_t}{y} \tag{19}$$

où

$$\eta \equiv 1 + \frac{s_p}{s_k}\frac{1-\tau_p}{1-\tau_k} \tag{20}$$

On observe que (20) implique

$$y = \eta\,(\delta_k - \Delta)\,x + (1-\tau-\eta\tau x)\times\varphi(x) \tag{21}$$

Notons $\varepsilon_2 \equiv x\varphi''/\varphi' < 0$ l'élasticité du taux d'intérêt au ratio κ/g (capital par tête sur capital public); le système linéaire (18-19) se réécrit dans ce cas de façon équivalente :

$$\begin{bmatrix}\frac{dx_{t+1}}{x}\\ \frac{dy_{t+1}}{y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\gamma\varepsilon_u\varepsilon_2\frac{\rho}{\rho+\Delta_k} & -\gamma\\ \gamma\eta & 0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\tau x\varphi' & -\gamma\\ \Delta_k\eta + (1-\tau-\tau x\eta)\,\varphi' & -\frac{y}{x}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{dx_t}{x}\\ \frac{dy_t}{y}\end{bmatrix}$$

[6] Variables restant non-négatives tout au long de la transition et condition de transversalité satisfaite.

La proposition ci-après établit alors l'unicité de la transition d'équilibre.

Proposition. – L'équilibre est unique (stabilité de la trajectoire selle).
Démonstration. *cf.* annexe 9.2

La proposition ci-dessus confirme la conjecture de Barro [1990] où le système dynamique est constitué d'une seule équation à une seule variable non-prédéterminée. La solution obtenue par Barro est un état stationnaire instable (déterminé) et le seul équilibre possible est l'état stationnaire lui-même.

5 Politique optimale

Un des objectifs de ce travail est d'identifier la ventilation optimale[7] du capital public g entre ses quatre composantes : le capital public civil (a), la consommation publique accumulée (b), le stock de R&D militaire (m) et le "capital" militaire hors R&D (n). Dans la section précédente firmes et consommateurs résolvaient leurs programmes en considérant comme donnée la politique économique du gouvernement ; compte tenu de ces fonctions de meilleures reponses, le problème du gouvernement est alors de déterminer la politique optimale à mettre en oeuvre *i.e.* le vecteur des taux d'imposition optimaux et la ventilation optimale du "capital" public dans ses quatre composantes, soit $\left(\sigma_a^*, \sigma_b^*, \sigma_m^*, \sigma_n^*, \tau_k^*, \tau_p^*, \tau_l^*\right)$. Comme par définition (*cf.* (10)) $\sigma_a + \sigma_b + \sigma_m + \sigma_n = 1$, il n'y a que six instruments et le problème est donc simplement de déterminer $\left(\sigma_a^*, \sigma_m^*, \sigma_n^*, \tau_k^*, \tau_p^*, \tau_l^*\right)$.

L'offre de travail étant inélastique, résoudre ce problème avec des taux d'imposition indépendants sur le capital et le travail, induit un taux de taxation sur le travail supérieur à 100%, afin de dégager des ressources permettant de subventionner (taux d'imposition négatif) les facteurs porteurs d'externalités positives (capital et R&D privée) ; une maximisation libre du bien-être sans contrainte sur les taux d'imposition conduit donc à, $\tau_k^* < 0, \tau_p^* < 0, \tau_l^* > 1$, ce qui n'est pas acceptable.

Afin de conserver le résultat essentiel de l'existence d'un régime de croissance endogène régulière, tout en excluant une taxation supérieure à 100% sur les revenus du travail, nous avons supposé un taux d'imposition τ_q commun, pour les revenus du capital et du travail: $\tau_q \equiv \tau_k = \tau_l$.[8] On remarquera que cette hypothèse ramène à cinq le nombre d'instruments tout en conservant libre le taux d'imposition τ_p sur les revenus de la R&D privée, ce qui nous permettra d'étudier l'impact d'une politique autonome de défiscalisation ou de subvention des investissements en R&D privée.

5.1 Caractérisation

Compte tenu de l'hypothèse d'agent représentatif, on sait qu'il est équivalent de maximiser par rapport aux instruments $(\sigma_a, \sigma_m, \sigma_n, \tau_p, \tau_q)$ n'importe quelle fonction de bien-être social – à partir du moment ou celle-ci est une fonction croissante des utilités individuelles – ou directement la fonction d'utilité de l'agent représentatif (1).

Pour ne pas alourdir inutilement les calculs on limite l'analyse à une économie en croissance régulière, c'est-à-dire en équilibre de long terme. Il est clair ici que, comme dans

[7] Entendue au sens de la répartition qui maximise le bien-être

[8] Cette solution a l'avantage d'être réaliste, de conserver le cadre habituel des modèles de croissance endogène et d'impliquer une solution plausible au problème de définition de la politique économique optimale.

Shieh et *alii* [2002], maximiser la croissance économique n'est pas équivalent à maximiser le bien-être social.

Afin de satisfaire les conditions d'homogénéité (*cf.* Hypothèse 2) et d'effectuer ultérieurement des simulations numériques, on suppose en outre que les fonctions de production sont de type Cobb-Douglas:

Hypothèse 5. *Les fonctions de production $F(.)$ et $e(.)$ s'écrivent :*

$$\begin{aligned} F(k,p,l,a,m,\bar{p}) &= \theta k^{s_k} p^{s_p} l^{1-s_k-s_p} a^{s_a} m^{s_m} \bar{p}^{1-s_k-s_p-s_a-s_m} \\ e(\sigma_m,\sigma_n) &\equiv B\sigma_m^{\beta_m}\sigma_n^{\beta_n} \;\; \text{avec} \;\; \beta_m+\beta_n=1 \end{aligned}$$

Enfin on se restreint au cas de fonctions d'utilité logarithmiques, faciles à manipuler.

Hypothèse 6. $u(c) \equiv c_u \ln c, \;\; v(b) \equiv c_v \ln b, \;\; w(e) \equiv c_w \ln e.$

Une fonction d'utilité logarithmique correspond au cas d'une élasticité de substitution intertemporelle unitaire. La fonction de bien-être social devient:

$$W = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t c_u \ln c_t + \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t c_v \ln b_t + \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t c_w \ln e_t$$

avec, sans perte de généralité :

$$c_u + c_v + c_w = 1 \tag{22}$$

Pour simplifier la présentation, au lieu de maximiser le bien-être directement par rapport aux instruments de politique économique $(\sigma_a, \sigma_m, \sigma_n, \tau_p, \tau_q)$, on le maximise par rapport au vecteur $(\sigma_a, \sigma_m, \sigma_n, \eta, h)$, où

$$h \equiv \gamma - \Delta_k \tag{23}$$

et on calcule ensuite $(\tau_p, \tau_q)^*$ à partir de $(\sigma_a, \sigma_m, \sigma_n, \eta, h)^*$.

On montre après des calculs (*cf.* annexe 9.3), que le système $[\Gamma]$ définissant la politique optimale $(\sigma_a, \sigma_m, \sigma_n, \eta, z, \varphi)^*$ se résout par blocs, en tirant d'abord φ^* et σ_a^* d'un système de dimension deux, $(z, \sigma_m, \sigma_n, \eta)^*$ étant ensuite directement donné par quatre équations $z(\varphi, \sigma_a)$, $\sigma_m(\varphi, \sigma_a)$ $\sigma_n(\varphi, \sigma_a)$, et $\eta(\varphi, \sigma_a)$.

Une fois le système $[\Gamma]$ résolu on a déterminé $\sigma_a, \sigma_m, \sigma_n, \eta, z, \varphi$ et Δ; on en déduit alors $\sigma_b = 1 - \sigma_a - \sigma_m - \sigma_n$, le facteur de croissance $\gamma \equiv z + \Delta$ et finalement (*cf.* annexe 9.3) :

$$x = \frac{\varphi - z}{z + \Delta - \beta\Delta_k} \frac{\beta s_k}{1 - s_p + (\eta - 1) s_k}$$

Il vient ensuite, $\tau = \left[1 + x\frac{\gamma-\beta\Delta_k}{\gamma-\Delta}\frac{1-s_p+(\eta-1)s_k}{\beta s_k}\right]^{-1}$ puis : $\tau_p = 1 - \frac{1-\tau}{1-s_p+(\eta-1)s_k}\frac{s_k}{s_p}(\eta-1)$, $\tau_q = 1 - \frac{1-\tau}{1-s_p+(\eta-1)s_k}$.

5.2 Paramétrisation

L'objectif de cette section est de calculer la politique économique optimale du gouvernement – soit $\left(\sigma_a^*, \sigma_b^*, \sigma_m^*, \sigma_n^*, \tau_p^*, \tau_q^*, \tau^*\right)$ – telle qu'elle est caractérisée dans la section précédente par le système noté $[\Gamma]$, en calibrant les valeurs des 14 paramètres structurels du modèle et des paramètres liés et en résolvant le système pour ces valeurs des paramètres.

5.2.1 Scénario de base

On fixe de façon habituelle le taux de préférence pour le présent à 4%. Les estimations disponibles pour le taux de dépréciation du capital privé font apparaître une différence importante entre capital physique et capital humain: le premier est caractérisé par un taux de dépréciation d'environ 7% contre moins de 2% pour le second[9]. Comme notre modèle ne distingue pas les deux types de capital, on a retenu un taux de dépréciation annuel moyen δ_k de 5%. Le taux de dépréciation δ_a du capital productif public, considéré comme du capital physique, a été fixé à 7% tandis que le taux de dépréciation δ_m du stock de R&D militaire est supposé égal à 12% ce qui correspond à la moyenne des taux de dépréciation estimés pour les investissements de R&D (*cf.* par exemple Mead C.I. [2007]). Enfin le taux de dépréciation δ_b de la consommation publique est de 100% (dépréciation totale en une année) tandis que celui des autres dépenses militaires (δ_n) – moyenne entre le taux de dépréciation élevé des dépenses de troupes (soldes) et celui plus faible du stock d'armements – est fixé à 20% après un calcul spécifique[10].

La part s_k de la rémunération du capital dans le PIB est fixée à 75% conformément à la plupart des estimations empiriques[11]; remarquons ici que s_k est une mesure de la part du capital physique et du capital humain dans le revenu global, tandis que $1 - s_k = s_a + s_m + s_p$ représente le poids des trois externalités productives que sont le capital public, la R&D militaire et la R&D privée. L'objectif de ce travail étant d'analyser l'impact de la R&D militaire et de la R&D privée sur la croissance économique et le bien-être global, nous avons volontairement limité la taille des externalités liées aux activités de R&D, afin d'obtenir des évaluations "prudentes" de l'impact de la R&D dans l'économie; nous avons ainsi retenu pour le scénario de base des valeurs plutôt faibles, $s_p = s_m = 1\%$, pour les deux paramètres décrivant l'impact de la R&D militaire et de la R&D privée sur la fonction de production.

Pour des raisons similaires nous avons décidé *(i)* de limiter le poids relatif du service de défense dans la fonction d'utilité des ménages – *i.e.*, l'impact indirect de la R&D militaire sur le bien-être global – en considérant que les ménages ont une très forte préférence pour les biens non militaires que sont la consommation publique et la consommation privée: $c_u = c_v = 49\%$, *(ii)* de limiter le rôle joué par la R&D militaire dans la fonction de production du service de défense: $\beta_m = 10\%$. Ces hypothèses devraient permettre d'éviter de surestimer artificiellement l'impact de la R&D (notamment) militaire sur le taux de croissance de l'économie et le bien-être.

5.2.2 Résultats

Nous avons résolu par simulation le système [Γ] définissant la politique optimale en retenant comme valeurs des paramètres exogènes du modèle, celles présentées ci-dessus[12];

[9] Cf. par exemple Arrazola & de Hevia [2004]

[10] En 2005 les dépenses militaires autres que la R&D représentent 39.43 milliards € et se décomposent en 12.22 milliards € de dépenses d'investissement et 27.21 milliards € de dépenses de consommation. On en déduit les parts respectives de l'investissement (31%) et de la consommation (69%) dans les dépenses de défense hors R&D. En considérant que le taux de dépréciation de ces dépenses d'investissement est le même que celui de l'investissement public, soit 7%, et que celui des dépenses de consommation est de 100%, on obtient un taux de dépréciation moyen des "autres dépenses militaires" d'environ 20%.

[11] *cf.* Mankiw & *alii* [1992], Aghion & Howitt [1997], Howitt [2000] et Klenow & Rodriguez-Clare [2005].

[12] Le tableau figurant en annexe 9.4 récapitule les valeurs retenues pour l'étalonnage des 14 paramètres exogènes libres du modèle.

nous en avons alors déduit les valeurs des principales variables endogènes du modèle :

- ventilation du "capital" public dans ses quatre composantes : σ_a, σ_b, σ_m, et σ_n

- ventilation de la dépense publique dans ses quatre composantes: $\tilde{\sigma}_a$, $\tilde{\sigma}_b$, $\tilde{\sigma}_m$ et $\tilde{\sigma}_n$

- taux de pression fiscale τ et sa décomposition entre le taux d'imposition des revenus du travail et du capital τ_q et le taux d'imposition des revenus de la R&D privée τ_p

- taux de croissance de l'économie : $\gamma - 1$

- bien-être global : W

Le tableau ci–après résume les résultats (exprimés en %) obtenus pour des valeurs des paramètres correspondant au scénario de base et ceux associés à un certain nombre de variantes que nous avons réalisées:[13]

Paramètres	σ_a	σ_b	σ_m	σ_n	$\tilde{\sigma}_a$	$\tilde{\sigma}_b$	$\tilde{\sigma}_m$	$\tilde{\sigma}_n$	τ_q	τ_p	τ	$\gamma-1$	W
Scenario de base	**78.70**	**16.74**	**3.34**	**1.20**	**37.51**	59.25	**2.14**	**1.09**	**12.94**	**-18.59**	**12.63**	**7.47**	**0.79**
Chocs sur les paramètres													
$\uparrow i = 4.5\%$	71.81	23.60	3.15	1.43	**25.47**	**71.90**	**1.57**	1.04	**10.74**	**-25.88**	**10.38**	**5.25**	0.64
$\uparrow\beta_m = 20\%$	78.71	16.72	3.49	1.07	37.57	59.21	2.24	0.97	12.95	-18.57	12.63	7.48	0.79
$\uparrow c_u = 55\%$, $\downarrow c_v = 44\%$, $\downarrow c_w = 1\%$	79.94	16.09	3.33	0.62	38.77	58.45	2.18	**0.57**	11.45	-18.46	**11.15**	7.32	0.92
$\downarrow c_u = 44\%$, $\uparrow c_v = 55\%$, $\downarrow c_w = 1\%$	77.95	18.21	3.22	0.59	35.60	61.88	1.98	**0.51**	14.12	-18.91	**13.79**	7.44	0.74
$\downarrow c_u = 48\%$, $\downarrow c_v = 48\%$, $\uparrow c_w = 4\%$	78.21	15.95	3.46	2.37	38.15	57.38	2.26	**2.19**	13.22	-18.50	12.90	7.58	0.73
$\uparrow\delta_k = 10\%$	83.08	12.44	3.40	1.06	**41.00**	**55.47**	2.40	1.11	14.05	**-15.22**	**13.76**	**4.58**	-0.23
$\uparrow\delta_a = 12\%$	75.37	19.86	3.43	1.32	38.46	58.80	**1.75**	0.96	12.39	**-20.36**	12.06	**6.32**	0.73
$\downarrow\delta_b = 90\%$	78.18	17.31	3.31	1.18	39.00	57.65	2.21	1.11	13.00	-18.39	12.68	7.63	0.82
$\uparrow\delta_m = 15\%$	78.75	16.81	3.21	1.20	37.30	59.24	2.36	1.08	12.93	-18.63	12.61	7.44	0.79
$\uparrow\delta_n = 25\%$	78.74	16.77	3.34	1.13	37.41	59.22	2.13	1.21	12.94	-18.60	12.62	7.46	0.79
$\uparrow s_a = 30\%$, $\downarrow s_k = 68.5\%$, $\downarrow s_m = 0.75\%$, $\downarrow s_p = 0.75\%$	86.30	10.68	2.05	0.95	**49.35**	**47.97**	1.60	1.06	**19.34**	-19.17	**19.05**	**6.57**	0.06
$\downarrow s_a = 18\%$, $\uparrow s_k = 80.5\%$, $\downarrow s_m = 0.75\%$, $\downarrow s_p = 0.75\%$	71.95	23.61	3.04	1.39	**30.68**	**66.56**	1.68	1.06	**8.39**	-16.88	**8.20**	**9.57**	1.73
$\downarrow s_a = 22\%$, $\downarrow s_k = 73.0\%$, $\uparrow s_m = 4.25\%$, $\downarrow s_p = 0.75\%$	69.33	16.81	12.61	1.23	**29.47**	61.87	**7.57**	1.08	13.78	**-22.57**	13.51	**5.14**	0.23
$\downarrow s_a = 22\%$, $\downarrow s_k = 73.0\%$, $\downarrow s_m = 0.75\%$, $\uparrow s_p = 4.25\%$	72.22	23.81	2.52	1.44	**24.74**	**72.97**	**1.23**	1.04	**10.91**	**-24.69**	**9.40**	**4.70**	0.56
Variantes hausse des externalités de R&D													
$\downarrow s_a = 21\%$, $\uparrow s_m = 2\%$, $\uparrow s_p = 2\%$	71.03	21.02	6.58	1.35	**27.64**	**67.72**	**3.56**	1.06	**11.18**	**-21.94**	**10.52**	**5.78**	0.66
$\downarrow s_a = 19\%$, $\uparrow s_m = 3\%$, $\uparrow s_p = 3\%$	61.16	27.78	9.51	1.53	**17.89**	**77.07**	**4.05**	0.97	**8.99**	**-26.99**	**7.91**	**3.96**	0.61

Les résultats sont standards pour ce type de modèle. Le taux de pression fiscale optimal est de 12.63% et engendre un taux de croissance d'équilibre de 7.47% ; ces résultats sont proches de ceux que l'on observe dans les travaux sur la croissance endogène ou un taux de pression fiscale optimal de moins de 20% conduit à des taux de croissance de l'ordre de 10%. Le taux d'imposition sur les revenus du travail et du capital s'établit à 12.94% et permet de dégager des ressources pour mettre en place une subvention à la R&D privée, qui se traduit par un taux d'imposition négatif de -18.59% sur les revenus tirés de cette dernière. La décomposition budgétaire du montant total des dépenses publiques en ses quatre postes – investissement civil (37.51%), consommation publique (59.25%), investissement en R&D militaire (2.14%) et autres dépenses militaires (1.09%) – souligne le rôle moteur de la R&D militaire. Malgré des hypothèses prudentes la politique économique optimale du gouvernement consiste à affecter 2.14% de l'ensemble des dépenses de l'Etat à la R&D défense (contre 0,45% actuellement[14]). Pour donner un ordre de grandeur, affecter 2.14% des dépenses actuelles de l'Etat à la R&D militaire conduirait à un quasi-quintuplement

[13] Chacune des variantes est basée sur la même paramétrisation que le scénario de base à l'exception du/des paramètre(s) mentionné(s) dont la/les nouvelle(s) valeur(s) est/sont indiquée(s) ; le sens du changement est signifié par une flèche dirigée ver le haut (augmentation de la valeur du paramètre par rapport au scénario de base) ou vers le bas (diminution de la valeur du paramètre par rapport au scénario de base).

[14] 3.51 milliards € en 2006 selon la loi de programmation militaire, pour un total de prélèvements de 785 milliards d'euros.

du budget de la recherche militaire. Les variantes "*hausses des externalités de R&D*" réalisées soulignent bien sûr la sensibilité du modèle à la taille des externalités de R&D ; ainsi lorsqu'on augmente progressivement et simulténement la taille des externalités de R&D militaire et de R&D privée (hausse de s_m et de s_p), la part de la R&D militaire dans le total des prélèvements augmente fortement (3.56% pour $s_m = s_p = 2\%$ et 4.05% pour $s_m = s_p = 3\%$) tandis que baisse fortement le taux d'imposition sur les revenus de la R&D privée (-21.94% pour $s_m = s_p = 2\%$, -26.99% pour $s_m = s_p = 3\%$).

Sans surprise une augmentation du taux de préférence pour le présent se traduit par de moindres investissements (quelle que soit leur nature et donc en particulier en R&D militaire) et une hausse de la part de la consommation publique qui passe de 59.25% à 71.90%.

Les résultats obtenus en termes de politique économique optimale sont relativement peu sensibles aux hypothèses faites sur la fonction d'utilité des ménages (distribution des coefficients c_u, c_v et c_w) ainsi qu'à celles faites sur la fonction de production du service de défense (coefficients β_m et β_n) ou sur les taux de dépréciation (coefficients δ_k, δ_a, δ_b, δ_m et δ_n). En revanche les résultats sont relativement sensibles aux hypothèses concernant la fonction de production (coefficients s_k, s_a, s_m et s_p).

6 Politique économique

L'objet de cette section est de réaliser plusieurs simulations permettant, d'évaluer l'impact macroéconomique sur le taux de croissance et le PIB, de différentes mesures de politique économique. La première partie de cette section est consacrée au calibrage du modèle sur données de l'économie française. La seconde partie propose plusieurs scénarios de politique économique qui font l'objet de simulations numériques.

6.1 Calibrage du modèle sur la France

Le calibrage du modèle consiste à fixer les valeurs des deux types de paramètres qui sont ensuite utilisés pour les simulations numériques : les paramètres structurels d'une part, les paramètres représentatifs de l'économie française d'autre part.

Les paramètres structurels utilisés sont ceux que nous avons déjà fixés dans la section précédente pour calculer la politique optimale du gouvernement (*cf.* tableau annexe 9.4), à l'exception toutefois du paramètre d'échelle θ qui est maintenant calibré de façon à caler le taux de croissance du PIB sur sa valeur observée pour l'économie française (*cf.* ci-après).

Pour les autres paramètres nous nous sommes basés sur les valeurs observées pour l'économie française en 2005. Les parts, dans l'ensemble des dépenses, de l'investissement civil ($\tilde{\sigma}_a$), de la consommation publique ($\tilde{\sigma}_b$), de la R&D militaire ($\tilde{\sigma}_m$) et des autres dépenses militaires ($\tilde{\sigma}_n$) sont directement déduites des dépenses de l'Etat classées selon les quatre postes précédents. Ainsi, à titre d'exemple, le montant de la R&D défense[15] qui atteint 2.97 milliards d'euros en 2005 représente 0.40% de l'ensemble des taxes (737 milliards €) collectées par l'Etat cette année là : on a donc $\tilde{\sigma}_m = 0.40\%$. On a calculé de la même façon la part de l'investissement civil, de la consommation publique et des "autres dépenses militaires" dans le budget de l'Etat, soit $\tilde{\sigma}_a = 21.12\%$, $\tilde{\sigma}_b = 73.13\%$ et $\tilde{\sigma}_n = 5.35\%$. Le rapport du total des taxes de l'année 2005 (737 milliards €) et du PIB de

[15] *cf.* Ministère de la Défense, Direction des Affaires Financières, OED, *La recherche et développement de défense*, Note ECODEF n°48, octobre 2007

cette même année (1691 milliards €), définit enfin directement le taux de pression fiscale de l'économie française, soit $\tau = 43.59\%$.

Le taux de pression fiscale de l'économie τ étant défini – *cf.* équation (15) – comme la moyenne pondérée des taux d'imposition spécifiques des revenus du capital τ_k, de la R&D privée τ_p, et du travail τ_l, soit $\tau \equiv s_k\tau_k + s_p\tau_p + (1 - s_k - s_p)\,\tau_l$, on obtient, en conservant un taux d'imposition τ_q commun pour les revenus du travail et du capital, $\tau_q \equiv (\tau - s_p\tau_p)/(1 - s_p)$ qui nous donne le taux d'imposition moyen des revenus du travail et du capital, en fonction du taux de pression fiscale de l'économie et du taux d'imposition spécifique des revenus de la R&D privée. En considérant, par souci de cohérence avec les coefficients de la fonction de production agrégée, que les revenus de la R&D privée représentent environ 1% du PIB soit 16.91 milliards d'euros en 2005, ceux-ci induiraient alors, s'ils étaient taxés au taux moyen d'imposition, un montant de taxes égal à 43.59% $\times$ 16.91 milliards € = 7.37 milliards €. Dans la mesure ou le crédit impôt recherche, principale mesure fiscale destinée à soutenir le développement de la recherche scientifique et technique des entreprises, représente un coût annuel pour le budget de l'Etat d'environ 1 milliards €, on en déduit que le montant total des taxes pesant sur les revenus de la R&D est de l'ordre de 7.37 $-$ 1 = 6.37 milliards € ; en rapportant ce chiffre au montant des revenus correspondant (16.91 milliards €) on obtient alors le taux d'imposition spécifique sur les revenus de la R&D, soit $\tau_p = 37.65\%$. En appliquant alors la formule ci-dessus on obtient immédiatement : $\tau_q = 43.65\%$.

Pour finir nous avons retenu un taux de croissance de 2% pour l'économie française qui nous permet de calibrer *in fine* le paramètre d'échelle θ. Le tableau reproduit en annexe 9.5 récapitule l'ensemble des paramètres utilisés pour les simulations numériques.

6.2 Scénarios de politique économique

L'objet de cette sous-section est de définir et de simuler plusieurs scénarios de politique économique.

6.2.1 Méthode

Dans le modèle, les variables de politique économique suceptibles d'êtres "choquées" sont : la part de l'investissement public dans l'ensemble des recettes fiscales ($\tilde{\sigma}_a$), la part de la consommation publique dans l'ensemble des recettes fiscales ($\tilde{\sigma}_b$), la part de la R&D militaire dans l'ensemble des recettes fiscales ($\tilde{\sigma}_m$), la part des autres dépenses militaires dans l'ensemble des recettes fiscales ($\tilde{\sigma}_n$), le taux d'imposition des revenus du travail et du capital (τ_q), le taux d'imposition des revenus de la R&D privée (τ_p).

Le taux d'imposition global étant une combinaison linéaire des taux d'imposition respectifs sur les revenus du travail et du capital d'une part et sur les revenus de la R&D privée d'autre part ($\tau \equiv s_p\tau_p + (1 - s_p)\,\tau_q$), il ne peut bien sur faire l'objet d'un choc autonome. Il est en revanche possible de jouer sur plusieurs variables simultanément, par exemple en simulant l'impact macroéconomique d'une baisse de la part $\tilde{\sigma}_b$ de la consommation publique dans l'ensemble des recettes fiscales, au profit d'une augmentation de la part $\tilde{\sigma}_m$ de la R&D militaire. Un scénario de politique économique est donc soit un choc simple sur une des variables listées ci-dessus, soit une combinaison de chocs portant sur plusieurs de ces variables.

Les exercices de simulation de mesures de politique économiques réalisés ci-après sont représentatifs de la diversité des exercices réalisables à partir du modèle (deux scénarios complémentaires sont par ailleurs simulés en annexe 9.6[16]).

6.2.2 Simulations

Les effets associés à trois scénarios de politique économique (S1, S2 et S3) sont résumés dans le tableau suivant:

	Taux de croissance de l'économie en %			Variations actualisées cumulées du PIB (milliards € 2005)			Variations actualisées cumulées du PIB (en % du PIB 2005)			Variations des recettes fiscales (milliards €)		
	S1	S2	S3	S1	S2	S3	S1	S2	S3	S1	S2	S3
Avant le choc	2.000			0.000			0.000			0.000		
1 an après	2.095	2.121	2.023	1.517	1.924	0.369	0.090	0.114	0.022	0.702	0.891	-0.846
5 ans après	2.058	2.068	2.017	14.823	17.840	3.990	0.877	1.055	0.236	2.326	2.701	-0.436
10 ans après	2.043	2.046	2.014	37.426	42.595	11.046	2.213	2.519	0.653	3.794	4.030	0.015
Asymptotiquement	2.037	2.037	2.013	394.389	394.331	138.529	23.323	23.319	8.192	-	-	-

Scénario n°1. La mesure de politique économique simulée est ici un *transfert permanent, interne au budget de la défense, d'un milliard d'euros, des dépenses militaires «standard» vers les dépenses de R&D défense.* Un transfert d'un milliard € correspond à 0.136% des recettes fiscales. En pratique, la part $\tilde{\sigma}_m$ des dépenses publiques destinées à l'investissement en R&D militaire passe ainsi de 0.40% à 0.536% tandis que celle $\tilde{\sigma}_n$ des *autres dépenses militaires* décroit de 5.35% à 5.214%.

La mesure simulée permet de gagner 0.095 point de croissance la première année tandis que son effet à long terme converge vers un gain de 0.037 point de croissance. En termes de gains monétaires cumulés, la mesure étudiée permet immédiatement (*i.e.* à un an) un gain actualisé de 1.52 milliards €, de 14.82 milliards € à cinq ans et de 37.43 milliards € sur une décennie.

Au total ce sont donc plus de deux points de PIB qui sont engendrés sur une décennie par cette mesure (2.213 exactement), soit une année de croissance environ. La dernière colonne figure le gain annuel de recettes fiscales associé à la mesure considérée : dès la première année, la mesure rapporte 702 millions € de recettes supplémentaires et dix ans après le choc initial ce sont 3.79 milliards € de recettes fiscales annuelles supplémentaires qui sont induits par le choc de politique économique.

Scénario n°2. On simule ici l'impact d'un *transfert permanent – à budget global inchangé – d'un milliard d'euros, des dépenses de consommation publique vers les dépenses de R&D défense.* Comme pour le scénario n°1, un transfert d'un milliard d'euros correspond à 0.136% de recettes fiscales. En pratique, la part $\tilde{\sigma}_m$ des dépenses publiques destinées à la R&D militaire passe comme précédemment de 0.4% à 0.536%, mais au détriment cette fois de la part $\tilde{\sigma}_b$ des dépenses de consommation publique qui passe de 73.13% à 72.994%.

Les résultats sont dans l'ensemble comparables à ceux obtenus pour le scénario n°1, même si cette seconde mesure apparaît légèrement plus efficace à court-moyen terme. Ainsi le gain actualisé en termes de PIB atteint avec cette variante 42.59 milliards € sur une décennie, contre 37.43 milliards quand le transfert est financé par un prélèvement sur les autres dépenses militaires. A long terme en revanche, le gain actualisé de PIB apparaît équivalent que le transfert en faveur de la R&D militaire soit financé par un

[16]- Scénario n°4: doublement des dépenses de R&D militaires, intégralement financé par une augmentation du taux d'imposition sur les revenus du travail et du capital

- Scénario n°5: baisse du taux d'imposition de la R&D privée correspondant à un doublement du Crédit Impôt Recherche, intégralement financée par une hausse du taux d'imposition sur les revenus du travail et du capital.

prélèvement sur les *autres dépenses militaires* ou qu'il soit financé par un prélèvement sur la consommation publique.

Scénario n°3. On étudie dans ce scénario l'effet d'une *baisse du taux d'imposition des revenus de la R&D privée, correspondant à un doublement du Crédit Impôt Recherche, intégralement financée par une baisse de la consommation publique* (transfert consommation publique vers CIR).

La réduction de recettes fiscales résultant d'un doublement du Crédit Impôt Recherche (CIR) est : $\Delta RF = CIR = -1$ milliard. Le montant total des taxes pesant sur les revenus de la R&D n'est donc plus, après le choc, de 6.37 milliards €, mais de 5.37 milliards € seulement. En rapportant ce chiffre au montant des revenus correspondant (16.91 milliards €) on obtient le nouveau taux d'imposition spécifique sur les revenus de la R&D, soit comme précédemment $\tau_p = 31.76\%$ (au lieu de 37.65% avant le choc).

La réduction ΔRF des recettes fiscales impliquée par le doublement du Crédit Impôt Recherche, reposant uniquement sur la consommation publique, la nouvelle part réduite des dépenses publiques de consommation, notée $\tilde{\sigma}'_b$, est donnée par $\tilde{\sigma}'_b.(RF + \Delta RF) = \tilde{\sigma}_b.RF + \Delta RF \quad i.e. \quad \tilde{\sigma}'_b = \frac{\tilde{\sigma}_b.RF-1}{RF-1} = \frac{0.7313\times737.09-1}{737.09-1} = 73.086\%$.

Les parts respectives des autres types de dépenses publiques (investissement public, R&D militaire, autres dépenses militaires) doivent évidemment être recalculées de façon à ce que la somme des parts reste unitaire, soit : $\tilde{\sigma}'_b = 1 - \tilde{\sigma}'_a - \tilde{\sigma}'_m - \tilde{\sigma}'_n$; les nouvelles valeurs de ces parts sont calculées en remarquant simplement que les recettes fiscales affectées à chaque type de dépense sont inchangées *ex post* puisque l'intégralité de la baisse des recettes repose sur la consommation publique :

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}'_a.(RF + \Delta RF) &= \tilde{\sigma}_a.RF \quad \Leftrightarrow \tilde{\sigma}'_a = \frac{\tilde{\sigma}_a.RF}{RF + \Delta RF} = \frac{0.21125 \times 737.09}{737.09 - 1} = 21.154\% \\
\tilde{\sigma}'_m.(RF + \Delta RF) &= \tilde{\sigma}_m.RF \quad \Leftrightarrow \tilde{\sigma}'_m = \frac{\tilde{\sigma}_m.RF}{RF + \Delta RF} = \frac{0.00403 \times 737.09}{737.09 - 1} = 0.403\% \\
\tilde{\sigma}'_n.(RF + \Delta RF) &= \tilde{\sigma}_n.RF \quad \Leftrightarrow \tilde{\sigma}'_n = \frac{\tilde{\sigma}_n.RF}{RF + \Delta RF} = \frac{0.05349 \times 737.09}{737.09 - 1} = 5.356\%
\end{aligned}$$

La lecture du tableau des simulations montre que le doublement du Crédit Impôt Recherche, financé par une baisse de la consommation publique, a un effet limité mais non négligeable sur l'économie. Si le taux de croissance de long terme n'est pratiquement pas modifié, le gain actualisé sur une décennie atteint 11.05 milliards €, soit l'équivalent de 0.65 point de croissance ce qui n'est pas négligeable. Les recettes fiscales baissent à court terme de 846 millions €, ce qui est naturel puisque l'augmentation du Crédit Impôt Recherche n'est pas compensée ici par une hausse des autres taux d'imposition ; la croissance induite par le choc fiscal permet toutefois de progressivement limiter la perte de recettes fiscales, jusqu'à afficher un gain net de recettes de 15 millions € à 10 ans.

7 Conclusion

Le modèle d'équilibre général avec croissance endogène développé dans l'article propose un cadre méthodologique permettant d'appréhender simplement les effets macroéconomiques à long terme des dépenses de R&D militaire. Les scénarios de politique économique réalisés dans la dernière partie montrent que quelque soit son mode de financement – augmentation des autres impôts ou baisse de la consommation publique – la défiscalisation des revenus de la R&D privée, *via* une augmentation du Crédit Impôt Recherche, a des effets plus limités sur l'économie, qu'une augmentation directe de l'investissement public en R&D défense. Dans un tel contexte, pour obtenir un même impact sur l'économie, l'Etat devra mobiliser davantage de moyens financiers s'il utilise l'outil incitatif de la défiscalisation des revenus de la R&D privée, que s'il investit directement en R&D publique.

8 Bibliographie

Aghion P. & Howitt P. [1997], Endogenous Growth Theory, MIT Press.

Aizenman J. & Glick R. [2003], Military Expenditure, Threats and Growth, NBER Working Papers 9618, National Bureau of Economic Research Inc..

Arrazola M. & de Hevia J. [2004], More on the Estimation of the Human Capital Depreciation Rate, Applied Economic Letters 11, 145-8.

Barro R. J. [1990], Government Spending in a Simple Model of Endogenous Growth, Journal of Political Economy 98, 103-25.

Bosi S. & Laurent T. [2006], Military R&D, Growth and the Optimal Allocation of Government Spending, Centre d'Etude des Politiques Economiques de l'Université d'Evry, EPEE, Working Paper, Avril

Chang W.Y., Tsai H.F. & Lai C.C. [1996], Effects of anticipated foreign military threats on arms accumulation, Southern Economic Journal 63, 507-514.

Chu A.C., and Lai C.-C. [2009], On the Growth and Welfare Effects of Defense R&D, working paper Institute of Economics, Academia Sinica, November.

Dakurah H., Davies S. & Sampath R. [2001], Defense Spending and Economic Growth in Developing Countries: A Causality Analysis, Journal of Policy Modelling 23, 651-658.

Dunne J.P., Smith R. & Willenbockel D. [2004], Models of Military Expenditure and Growth: A Critical Review, Defence and Peace Economics 16, 449-461.

Howitt P. [2000], Endogenous Growth and Cross-Country Income Differences, *American Economic Review* 90, 829-846.

Huand C. & Mintz A. [1991], Defense Expenditures and Economic Growth: the Externality Effect, Defense Economics 3, 35-40.

Klenow P.J., A. Rodriguez-Clare [2005], Externalities and Growth, in Aghion P. and S. Durlauf eds., *Handbook of Economic Growth*, Elsevier, Amsterdam.

Mankiw N. G., Romer D. & Weil D. N. [1992], A Contribution to the Empirics of Economic Growth, Quarterly Journal of Economics 107, 407-437.

Mead C.I. [2007], *R&D Depreciation Rates in the 2007 R&D Satellite Account*, Bureau of Economic Analysis, NSF, 2007 R&D Satellite Account Background Paper.

Murdoch J.C., Pi C.R. & Sandler T. [1997], The Impact of Defense and Nondefense Public Spending on Growth in Asia and Latin America, Defense and Peace Economics 8, 205-224.

Ram R. [1995], Defense Expenditure and Economic Growth, in Hartley, K., Sandler, T. (Eds.), Handbook of Defense Economics, Elsevier, Amsterdam, 251-273.

Shieh J., Lai C.C. & Chang W.Y. [2002], The Impact of Military Burden on Long-Run Growth andWelfare, Journal of Development Economics 68, 443-454.

Van der Ploeg F. & de Zeeuw A. [1990], Perfect Equilibrium in a Model of Competitive Arms Accumulation, International Economic Review 31, 131-146.

Zou H. [1995], A Dynamic Model of Capital and Arms Accumulation, Journal of Economic Dynamics and Control 19, 371-393.

9 Annexes

9.1 Conditions d'équilibre

Puisque $a_t = \sigma_a g_t$ et $m_t = \sigma_m g_t$, on peut facilement réécrire la contrainte budgétaire de l'agent représentatif (2) comme une contrainte de ressources agrégée :

$$\begin{aligned} & c_t + \kappa_{t+1} - \Delta_k \kappa_t + \pi_{t+1} - \Delta_p \pi_t \\ \leq \quad & \left[(1-\tau_k) s_{kt} + (1-\tau_p) s_{pt} + (1-\tau_l)(1-s_{kt}-s_{pt})\right] f(\kappa_t, \pi_t, \sigma_a g_t, \sigma_m g_t) \end{aligned} \tag{24}$$

La contrainte budgétaire du gouvernement (11) devient pour sa part,

$$g_{t+1} - \Delta g_t = \left[\tau_k s_{kt} + \tau_p s_{pt} + \tau_l (1 - s_{kt} - s_{pt})\right] f(\kappa_t, \pi_t, \sigma_a g_t, \sigma_m g_t) \tag{25}$$

tandis qu'en substituant (7) dans l'équation d'Euler (4), on obtient :

$$\frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+1})} = \beta \left[\Delta_k + (1-\tau_k) f_\kappa (\kappa_{t+1}, \pi_{t+1}, a_{t+1}, m_{t+1})\right] \tag{26}$$

En notant que la propriété d'homogénéité de la fonction de production intensive implique que ses dérivées sont homogènes de degré zéro,

$$f_\kappa(\mu\kappa, \mu\pi, \mu a, \mu m) = f_\kappa(\kappa, \pi, a, m)$$

il vient imédiatement:

$$f_\kappa(\kappa_t, \pi_t, \sigma_a g_t, \sigma_m g_t) = f_\kappa\left(\frac{\kappa_t}{g_t}, \frac{\pi_t}{g_t}, \sigma_a, \sigma_m\right)$$

En remarquant alors que :

$$r_{pt} = \frac{\kappa_t}{\pi_t}\frac{s_{pt}}{s_{kt}} f_\kappa(\kappa_t, \pi_t, a_t, m_t)$$

la condition de non-arbitrage (3) se réécrit :

$$\begin{aligned} \Delta_k + (1-\tau_k) r_{kt} &= \Delta_p + (1-\tau_p) r_{pt} \\ \textit{i.e.} \quad \Delta_k + (1-\tau_k) f_\kappa(\kappa_t, \pi_t, a_t, m_t) &= \Delta_p + (1-\tau_p) \frac{\kappa_t}{\pi_t}\frac{s_{pt}}{s_{kt}} f_\kappa(\kappa_t, \pi_t, a_t, m_t) \end{aligned}$$

Afin de simplifier les résultats analytiques et sans perte importante de généralité, on suppose :

Hypothèse 3. $\Delta_p = \Delta_k$.

Dans ce cas on a :

$$\pi_t = \frac{1-\tau_p}{1-\tau_k}\frac{s_{pt}}{s_{kt}}\kappa_t \tag{27}$$

Et donc:

$$r_{kt} = f_\kappa(\kappa_t, \pi_t, a_t, m_t) = f_\kappa\left(\frac{\kappa_t}{g_t}, \frac{\pi_t}{g_t}, \sigma_a, \sigma_m\right) = f_\kappa\left(\frac{\kappa_t}{g_t}, \frac{1-\tau_p}{1-\tau_k}\frac{s_{pt}}{s_{kt}}\frac{\kappa_t}{g_t}, \sigma_a, \sigma_m\right)$$

En posant,

$$\begin{aligned}
x_t &\equiv \frac{\kappa_t}{g_t} \\
\varphi(x_t) &\equiv f\left(x_t, \frac{1-\tau_p}{1-\tau_k}\frac{s_{pt}}{s_{kt}}x_t, \sigma_a, \sigma_m\right)
\end{aligned}$$

et en supposant constantes les élasticités de la production par rapport aux inputs

Hypothèse 4. *Le vecteur des élasticités* $(s_{kt}, s_{pt}, s_{at}, s_{mt}) = (s_k, s_p, s_a, s_m)$ *est constant.*

On obtient :

$$\varphi'(x_t) = f_\kappa + \frac{1-\tau_p}{1-\tau_k}\frac{s_p}{s_k}f_\pi = \frac{s_k+s_\pi}{s_k}f_\kappa\left(x_t, \frac{1-\tau_p}{1-\tau_k}\frac{s_p}{s_k}x_t, \sigma_a, \sigma_m\right)$$

Compte tenu de (27) et comme,

$$f_\pi = \frac{s_\pi}{s_k}\frac{\kappa_t}{\pi_t}f_\kappa = \frac{1-\tau_k}{1-\tau_p}\frac{s_\pi}{s_p}f_\kappa$$

où

$$s_\pi = 1 - s_k - s_a - s_m$$

Il vient :

$$\begin{aligned}
f_\kappa &= \frac{s_k}{s_k+s_\pi}\varphi'(x_t) \\
r_{kt} &= f_\kappa(\kappa_t, \pi_t, a_t, m_t) = \frac{s_k}{s_k+s_\pi}\varphi'(x_t)
\end{aligned}$$

En définissant le taux de pression fiscale de l'économie τ comme la moyenne pondérée des taux d'imposition spécifiques (*cf.* (15)),

$$\tau \equiv s_k\tau_k + s_p\tau_p + (1 - s_k - s_p)\tau_l$$

les équations (24), (25) et l'équation d'Euler (26) peuvent se réécrivent en tenant compte des Hypothèses 3 et 4 :

$$\begin{aligned}
c_t + \left(1 + \frac{1-\tau_p}{1-\tau_k}\frac{s_p}{s_k}\right)(\kappa_{t+1} - \Delta_k\kappa_t) &\leq (1-\tau)\, g_t\varphi(x_t) && (28) \\
g_{t+1} - \Delta g_t &= \tau g_t\varphi(x_t) && (29) \\
\frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+1})} &= \beta\left[\Delta_k + (1-\tau_k)\frac{s_k}{s_k+s_\pi}\varphi'(x_{t+1})\right]
\end{aligned}$$

puisque,

$$f(\kappa_t, \pi_t, \sigma_a g_t, \sigma_m g_t) = g_t f\left(\frac{\kappa_t}{g_t}, \frac{\pi_t}{g_t}, \sigma_a, \sigma_m\right) = g_t\varphi(x_t)$$

En posant

$$\begin{aligned}
y_t &\equiv c_t/g_t && (30) \\
\gamma_t &\equiv g_{t+1}/g_t
\end{aligned}$$

et en divisant les deux côtés de (28) et (29) par g_t, on obtient finalement :

$$
\begin{aligned}
y_t + \left(1 + \frac{1-\tau_p}{1-\tau_k}\frac{s_p}{s_k}\right)(\gamma_t x_{t+1} - \Delta_k x_t) &\leq (1-\tau)\varphi(x_t) && (31)\\
\gamma_t &= \Delta + \tau\varphi(x_t) && (32)
\end{aligned}
$$

Compte tenu de l'hypothèse 1, l'équation d'Euler peut d'autre part se réécrire :

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \left(\beta\left[\Delta_k + (1-\tau_k)\frac{s_k}{s_k+s_\pi}\varphi'(x_{t+1})\right]\right)^{\varepsilon_u}$$

On a donc :

$$\frac{y_{t+1}}{y_t}\gamma_t = \left(\beta\left[\Delta_k + (1-\tau_k)\frac{s_k}{s_k+s_\pi}\varphi'(x_{t+1})\right]\right)^{\varepsilon_u} \qquad (33)$$

En substituant (32) dans (33) et (31), on obtient alors les deux équations (13) et (14):

$$
\begin{aligned}
[\Delta + \tau\varphi(x_t)]\frac{y_{t+1}}{y_t} &= \left(\beta\left[\Delta_k + (1-\tau_k)\frac{s_k}{s_k+s_\pi}\varphi'(x_{t+1})\right]\right)^{\varepsilon_u}\\
y_t + \left(1 + \frac{1-\tau_p}{1-\tau_k}\frac{s_p}{s_k}\right)(\Delta x_{t+1} - \Delta_k x_t) &= \left[1 - \tau - \left(1 + \frac{1-\tau_p}{1-\tau_k}\frac{s_p}{s_k}\right)\tau x_{t+1}\right]\varphi(x_t)
\end{aligned}
$$

ce qui termine la démonstration ■

9.2 Unicité de l'équilibre

On veut prouver que l'équilibre stationnaire est un point selle. Le système étant de dimension 2 avec une variable prédéterminée, la stabilité de la trajectoire selle implique l'unicité de l'équilibre avec anticipations rationnelles (avec ou sans transition). Le système s'écrivant,

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_{t+1}}{x} \\ \frac{dy_{t+1}}{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma\varepsilon_u\varepsilon_2\frac{\rho}{\rho+\Delta_k} & -\gamma \\ \gamma\eta & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tau x\varphi' & -\gamma \\ \Delta_k\eta + (1-\tau-\tau x\eta)\varphi' & -\frac{y}{x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dx_t}{x} \\ \frac{dy_t}{y} \end{bmatrix}$$

le déterminant et la trace de la matrice Jacobienne sont donc :

$$
\begin{aligned}
D &= \frac{1}{\gamma}\left[\Delta_k + \frac{\varphi'}{\eta}\left(1 - \tau - \tau x\eta - \tau\frac{y}{\gamma}\right)\right] && (34)\\
T &= 1 + D + \frac{1}{\gamma}\frac{y}{x\eta}\left(\frac{\varphi'}{\gamma}\tau x - \frac{\rho}{\rho+\Delta_k}\varepsilon_2\varepsilon_u\right) && (35)
\end{aligned}
$$

Dans le plan trace-déterminant $\{(T, D)\}$, les points selle coincident avec deux cônes :

$$
\begin{aligned}
-T-1 &< D < T-1\\
T-1 &< D < -T-1
\end{aligned}
$$

Comme $\varepsilon_2 < 0$, (35) implique :

$$D = T - 1 - \frac{1}{\gamma}\frac{y}{x\eta}\left(\frac{\varphi'}{\gamma}\tau x - \frac{\rho}{\rho+\Delta_k}\varepsilon_2\varepsilon_u\right) < T - 1 \qquad (36)$$

Pour montrer que l'état stationaire est un point selle, il suffit de montrer que $D > -T - 1$.

En substituant (34) et (35) dans $D > -T - 1$, on obtient la condition suivante :

$$D > \frac{1}{2}\frac{1}{\gamma}\frac{y}{x\eta}\left(\frac{\rho}{\rho+\Delta_k}\varepsilon_2\varepsilon_u - \frac{\varphi'}{\gamma}\tau x\right) - 1$$

ou, de façon équivalente,

$$\gamma + \Delta_k + \frac{\varphi'}{\eta}\left(1 - \tau - \tau x\eta - \frac{\tau}{2}\frac{y}{\gamma}\right) > \frac{1}{2}\frac{y}{x\eta}\frac{\rho}{\rho+\Delta_k}\varepsilon_2\varepsilon_u$$

Comme $\varepsilon_2 < 0$, il suffit de prouver que

$$\gamma + \Delta_k + \frac{\varphi'}{\eta}\left(1 - \tau - \tau x\eta - \frac{\tau}{2}\frac{y}{\gamma}\right) > 0 \tag{37}$$

D'après l'équation (17) et la définition (20), en utilisant $\gamma = \Delta + \tau\varphi$ on observe que

$$y = \varphi(1-\tau) - \eta x(\gamma - \Delta_k) \tag{38}$$

En remplaçant (38) dans (37), on obtient :

$$\begin{aligned}
& \gamma + \Delta_k + \frac{\varphi'}{\eta}\left(1 - \tau - \tau x\eta - \frac{\tau}{2}\frac{y}{\gamma}\right) \\
= \quad & \Delta + (1-\tau)\frac{\varphi'}{\eta}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\tau\varphi}{\Delta+\tau\varphi}\right) + \left(\frac{1}{2}\frac{\Delta+\tau\varphi-\Delta_k}{\Delta+\tau\varphi} - 1\right)\frac{\varphi' x}{\varphi}\tau\varphi + \tau\varphi + \Delta_k \\
\geq \quad & \Delta + (1-\tau)\frac{\varphi'}{\eta}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\tau\varphi}{\Delta+\tau\varphi}\right) + \left(\frac{1}{2}\frac{\Delta+\tau\varphi-\Delta_k}{\Delta+\tau\varphi} - 1\right)\varepsilon_1\tau\varphi + \varepsilon_1(\tau\varphi + \Delta_k) \\
= \quad & \Delta + (1-\tau)\frac{\varphi'}{\eta}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\tau\varphi}{\Delta+\tau\varphi}\right) + \left(\frac{1}{2}\tau\varphi + \left(1 - \frac{1}{2}\frac{\tau\varphi}{\Delta+\tau\varphi}\right)\Delta_k\right)\varepsilon_1 > 0
\end{aligned}$$

où

$$\varepsilon_1 \equiv \frac{\varphi' x}{\varphi} \in (0,1)$$

ce qui termine la démonstration ■

9.3 Caractérisation de la politique optimale

Avant de maximiser on doit calculer la fonction de bien-être (fonction d'utilité) le long du sentier de croissance équilibrée: $(c_t, b_t, m_t, n_t) = (c_0, b_0, m_0, n_0)\gamma^t$, où γ est le facteur commun de croissance régulière :

$$e_t \equiv e(m_t, n_t) = e\left(m_0\gamma^t, n_0\gamma^t\right) = e(m_0, n_0)\gamma^t = e_0\gamma^t$$

(notons que la fonction de production du service de défense est supposée être homogène de degré un). En notant $e_0 \equiv e(m_0, n_0)$, et en tenant compte de la restriction (22), il vient :

$$\begin{aligned} W &= c_u \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln\left(c_0 \gamma^t\right) + c_v \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln\left(b_0 \gamma^t\right) + c_w \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln\left(e_0 \gamma^t\right) \\ &= \left(c_u \ln c_0 + c_v \ln b_0 + c_w \ln e_0\right) \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t + \left(c_u + c_v + c_w\right) \ln \gamma \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t t \\ &= \frac{1}{1-\beta} \left(c_u \ln c_0 + c_v \ln b_0 + c_w \ln e_0 + \frac{\beta}{1-\beta} \ln \gamma \right) \end{aligned}$$

L'unicité de l'équilibre avec anticipations rationnelles (Proposition section 4.2) requiert la compatibilité de c_0, b_0, e_0 avec le facteur de croissance régulière γ. La définition (9) concernant la politique économique implique à l'origine: $(a_0, b_0, m_0, n_0) = (\sigma_a, \sigma_b, \sigma_m, \sigma_n)\, g_0$ et $e_0 = e(m_0, n_0) = e(\sigma_m g_0, \sigma_n g_0) = e(\sigma_m, \sigma_n)\, g_0$. De la définition (30) on obtient $c_0 = y g_0$. La croissance endogène de l'équilibre stationnaire implique un sentier de croissance régulière ; sous la restriction (22) on obtient :

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{1-\beta} \left(c_u \ln(y g_0) + c_v \ln(\sigma_b g_0) + c_w \ln\left[e(\sigma_m, \sigma_n)\, g_0\right] + \frac{\beta}{1-\beta} \ln \gamma \right) \\ &= \frac{1}{1-\beta} \left[c_u \ln y + c_v \ln \sigma_b + c_w \ln e(\sigma_m, \sigma_n) + \ln g_0 + \frac{\beta}{1-\beta} \ln \gamma \right] \end{aligned}$$

où $g_0 \equiv a_0 + b_0 + m_0 + n_0$ est la condition initiale.

Comme β et g_0 ne sont pas des variables de choix, le problème de maximiser W est équivalent au problème suivant :

$$\max \left[c_u \ln y + c_v \ln \sigma_b + c_w \ln e(\sigma_m, \sigma_n) + \frac{\beta}{1-\beta} \ln \gamma \right] \tag{39}$$

Sous l'Hypothèse 4, la politique de dépense publique (9) implique :

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\kappa_t, \pi_t, a_t, m_t, \bar{p}_t) &= \theta \kappa_t^{s_k} \pi_t^{s_p} a_t^{s_a} m_t^{s_m} \bar{p}_t^{1-s_k-s_p-s_a-s_m} \\ f(\kappa_t, \pi_t, a_t, m_t) &= \theta \kappa_t^{s_k} \pi_t^{1-s_k-s_a-s_m} a_t^{s_a} m_t^{s_m} \\ \varphi(x) &= \frac{f(\kappa_t, \pi_t, a_t, m_t)}{g_t} = f(x, (\eta-1)x, \sigma_a, \sigma_m) \\ &= \theta \sigma_a^{s_a} \sigma_m^{s_m} (\eta-1)^{1-s_k-s_a-s_m} x^{1-s_a-s_m} \\ \varphi'(x) &= (1-s_a-s_m)\, \theta \sigma_a^{s_a} \sigma_m^{s_m} (\eta-1)^{1-s_k-s_a-s_m} x^{-s_a-s_m} \end{aligned} \tag{40}$$

où,

$$\eta \equiv 1 + \frac{s_p}{s_k} \frac{1-\tau_p}{1-\tau_q}$$

Toujours sous l'Hypothèse 4 on a: $\varepsilon_1 \equiv x\varphi'/\varphi = 1 - s_a - s_m$.

Comme $\varepsilon_u = 1$, on obtient à partir de (16) l'équation implicite qui définit l'état stationnaire x :

$$\Delta + \tau \theta \sigma_a^{s_a} \sigma_m^{s_m} (\eta-1)^{1-s_k-s_a-s_m} x^{1-s_a-s_m} = \beta \left[\Delta_k + (1-\tau_q)\, s_k \theta \sigma_a^{s_a} \sigma_m^{s_m} (\eta-1)^{1-s_k-s_a-s_m} x^{-s_a-s_m} \right] \tag{41}$$

où, selon l'équation (15):

$$\tau = s_p \tau_p + (1 - s_p)\,\tau_q \tag{42}$$

Comme $\tau\varphi = \gamma - \Delta$, l'équation (16) devient :

$$\gamma = \beta \left[\Delta_k + \frac{s_k}{s_k + s_\pi} \frac{1 - \tau_q}{\tau} \frac{1}{x} \frac{x\varphi'}{\varphi} (\gamma - \Delta)\right] \tag{43}$$

En substituant ε_1 dans l'équation (43), en remarquant que $s_\pi \equiv 1 - s_k - s_a - s_m$ et en résolvant en γ, on obtient explicitement l'expression du facteur de croissance :

$$\gamma = \beta \frac{\Delta s_k (1 - \tau_q) - \Delta_k \tau x}{\beta s_k (1 - \tau_q) - \tau x} \tag{44}$$

Sous l'Hypothèse 4, l'équation implicite (41) définissant l'état stationnaire devient :

$$\theta \sigma_a^{s_a} \sigma_m^{s_m} (\eta - 1)^{1 - s_k - s_a - s_m} = \frac{(\Delta - \beta \Delta_k)\, x^{s_a + s_m}}{\beta s_k (1 - \tau_q) - \tau x} \tag{45}$$

Au lieu de maximiser le bien-être directement par rapport aux instruments de politique économique $(\sigma_a, \sigma_m, \sigma_n, \tau_p, \tau_q)$, maximisons celui-ci indirectement par rapport au vecteur alternatif $(\sigma_a, \sigma_m, \sigma_n, \eta, h)$, où h est donné par (23), et enfin calculons $(\tau_p, \tau_q)^*$ en utilisant $(\sigma_a, \sigma_m, \sigma_n, \eta, h)^*$.

σ_b est donné par (10) et le programme (39) devient

$$\max \left[c_u \ln y + c_v \ln (1 - \sigma_a - \sigma_m - \sigma_n) + c_w \ln e (\sigma_m, \sigma_n) + \frac{\beta}{1 - \beta} \ln \gamma\right] \tag{46}$$

On exprimera maintenant y en termes de $(\sigma_a, \sigma_m, \sigma_n, \eta, h)$.

En utilisant (20) et (42), on trouve

$$\begin{aligned} 1 - \tau_p &= \frac{1 - \tau}{1 - s_p + (\eta - 1)\, s_k} \frac{s_k}{s_p} (\eta - 1) \\ 1 - \tau_q &= \frac{1 - \tau}{1 - s_p + (\eta - 1)\, s_k} \end{aligned} \tag{47}$$

De (40) et (45), on sait que

$$\varphi (x) = \frac{(\Delta - \beta \Delta_k)\, x}{\beta s_k (1 - \tau_q) - \tau x} \tag{48}$$

De (16), on sait aussi que

$$\tau = \frac{\gamma - \Delta}{\varphi (x)} \tag{49}$$

où, d'une manière équivalente,

$$\varphi (x) = \frac{\gamma - \Delta}{\tau} \tag{50}$$

En remplaçant (47) dans (48) et le résultat ainsi obtenu dans (49), puis en résolvant par rapport à τ, on obtient :

$$\tau = \left[1 + x \frac{\gamma - \beta \Delta_k}{\gamma - \Delta} \frac{1 - s_p + (\eta - 1)\, s_k}{\beta s_k}\right]^{-1} \tag{51}$$

En substituant (50) et (51) dans (21), on a :

$$y = x\left[\frac{1-s_p+(\eta-1)\,s_k}{\beta s_k}\left(\gamma-\beta\Delta_k\right)-\eta\left(\gamma-\Delta_k\right)\right] \tag{52}$$

En remplaçant (52) dans (46) et en utilisant (23), on trouve :

$$\begin{aligned}
& \tilde{W}\left(\sigma_a,\sigma_m,\sigma_n,\eta,h\right) \\
\equiv\ & c_u\ln x + c_u\ln\left[\frac{1-s_p+(\eta-1)\,s_k}{\beta s_k}\left(h+(1-\beta)\,\Delta_k\right)-\eta h\right] \\
& + c_v\ln\left(1-\sigma_a-\sigma_m-\sigma_n\right)+c_w\ln e\left(\sigma_m,\sigma_n\right)+\frac{\beta}{1-\beta}\ln\left(h+\Delta_k\right)
\end{aligned}$$

On observe que x est déterminé par (45), où l'on a substitué (23), (47) et (51) :

$$\theta\sigma_a^{s_a}\sigma_m^{s_m}\left(\eta-1\right)^{1-s_k-s_a-s_m}x^{1-s_a-s_m} = h+\Delta_k-\Delta+x\left(h+(1-\beta)\,\Delta_k\right)\frac{1-s_p+(\eta-1)\,s_k}{\beta s_k} \tag{53}$$

où $\Delta = \Delta_b+\sigma_a\left(\Delta_a-\Delta_b\right)+\sigma_m\left(\Delta_m-\Delta_b\right)+\sigma_n\left(\Delta_n-\Delta_b\right)$.

De (53), en appliquant le théorème de la fonction implicite, nous pouvons définir

$$x = x\left(\sigma_a,\sigma_m,\sigma_n,\eta,h\right)$$

avec derivées partielles :

$$\left(x_a,x_m,x_n,x_\eta,x_h\right)=\left(\frac{\partial x}{\partial\sigma_a},\frac{\partial x}{\partial\sigma_m},\frac{\partial x}{\partial\sigma_n},\frac{\partial x}{\partial\eta},\frac{\partial x}{\partial h}\right)$$

Ces dérivées peuvent être calculées en différentiant totalement (53).

$$\frac{x_a}{x} = \frac{\Delta_a-\Delta_b+\varphi\frac{s_a}{\sigma_a}}{\left(s_a+s_m\right)\varphi-z} \tag{54}$$

$$\frac{x_m}{x} = \frac{\Delta_m-\Delta_b+\varphi\frac{s_m}{\sigma_m}}{\varphi\left(s_a+s_m\right)-z} \tag{55}$$

$$\frac{x_n}{x} = \frac{\Delta_n-\Delta_b}{\varphi\left(s_a+s_m\right)-z} \tag{56}$$

$$\frac{x_\eta}{x} = \frac{\varphi\frac{1-s_k-s_a-s_m}{\eta-1}-\left(z+\Delta-\beta\Delta_k\right)\frac{x}{\beta}}{\varphi\left(s_a+s_m\right)-z} \tag{57}$$

$$\frac{x_h}{x} = -\frac{1+\frac{1-s_p+(\eta-1)s_k}{s_k}\frac{x}{\beta}}{\varphi\left(s_a+s_m\right)-z} \tag{58}$$

où

$$z \equiv \gamma-\Delta = h+\Delta_k-\Delta$$

La politique optimale réalise un vecteur $\left(\sigma_a,\sigma_m,\sigma_n,\eta,z\right)^*$ qui satisfait le système suivant :

$$\left(\frac{\partial\tilde{W}}{\partial\sigma_a},\frac{\partial\tilde{W}}{\partial\sigma_m},\frac{\partial\tilde{W}}{\partial\sigma_n},\frac{\partial\tilde{W}}{\partial\eta},\frac{\partial\tilde{W}}{\partial h}\right)=0$$

On remarquera que, sous l'hypothèse 2,

$$\frac{\partial e}{\partial \sigma_m}\frac{1}{e} = \frac{\beta_m}{\sigma_m},\ \frac{\partial e}{\partial \sigma_n}\frac{1}{e} = \frac{\beta_n}{\sigma_n}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \sigma_a} &= c_u \frac{x_a}{x} - c_v \frac{1}{1-\sigma_a-\sigma_m-\sigma_n} = 0 \\
\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \sigma_m} &= c_u \frac{x_m}{x} - c_v \frac{1}{1-\sigma_a-\sigma_m-\sigma_n} + c_w \frac{\beta_m}{\sigma_m} = 0 \\
\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \sigma_n} &= c_u \frac{x_n}{x} - c_v \frac{1}{1-\sigma_a-\sigma_m-\sigma_n} + c_w \frac{\beta_n}{\sigma_n} = 0 \\
\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \eta} &= c_u \frac{x_\eta}{x} + c_u \frac{\frac{1}{\beta}\left(z+\Delta-\beta\Delta_k\right) - \left(z+\Delta-\Delta_k\right)}{\frac{1-s_p+(\eta-1)s_k}{\beta s_k}\left(z+\Delta-\beta\Delta_k\right) - \eta\left(z+\Delta-\Delta_k\right)} = 0 \\
\frac{\partial \tilde{W}}{\partial h} &= c_u \frac{x_h}{x} + c_u \frac{\frac{1-s_p+(\eta-1)s_k}{\beta s_k} - \eta}{\frac{1-s_p+(\eta-1)s_k}{\beta s_k}\left(z+\Delta-\beta\Delta_k\right) - \eta\left(z+\Delta-\Delta_k\right)} + \frac{\beta}{1-\beta}\frac{1}{z+\Delta} = 0
\end{aligned}$$

En substituant les équations (54-58) et en prenant en compte l'équation (53), on obtient le système suivant. La politique optimale est un vecteur $(\sigma_a, \sigma_m, \sigma_n, \eta, z)^*$ tel que $(\sigma_a, \sigma_m, \sigma_n, \eta, z, \varphi)^*$ est solution de :

$$\varphi = \theta \sigma_a^{s_a} \sigma_m^{s_m} \left(\eta - 1\right)^{1-s_k-s_a-s_m} x^{1-s_a-s_m} \tag{59}$$

$$0 = c_u \frac{\Delta_a - \Delta_b + \frac{s_a}{\sigma_a}\varphi}{\left(s_a+s_m\right)\varphi - z} - c_v \frac{1}{1-\sigma_a-\sigma_m-\sigma_n} \tag{60}$$

$$0 = c_u \frac{\Delta_m - \Delta_b + \frac{s_m}{\sigma_m}\varphi}{\left(s_a+s_m\right)\varphi - z} - c_v \frac{1}{1-\sigma_a-\sigma_m-\sigma_n} + c_w \frac{\beta_m}{\sigma_m} \tag{61}$$

$$0 = c_u \frac{\Delta_n - \Delta_b}{\left(s_a+s_m\right)\varphi - z} - c_v \frac{1}{1-\sigma_a-\sigma_m-\sigma_n} + c_w \frac{\beta_n}{\sigma_n} \tag{62}$$

$$\begin{aligned}
0 = {} & \frac{\frac{1-s_k-s_a-s_m}{\eta-1}\varphi - x\left(z+\Delta-\beta\Delta_k\right)\frac{1}{\beta}}{\left(s_a+s_m\right)\varphi - z} \\
& + \frac{\left(1-\beta\right)\left(z+\Delta\right)}{\frac{1-s_p-s_k}{s_k}\left(z+\Delta-\beta\Delta_k\right) + \eta\left(1-\beta\right)\left(z+\Delta\right)}
\end{aligned} \tag{63}$$

$$\begin{aligned}
0 = {} & -c_u \frac{1 + x\frac{1-s_p+(\eta-1)s_k}{\beta s_k}}{\left(s_a+s_m\right)\varphi - z} \\
& + c_u \frac{\frac{1-s_p+(\eta-1)s_k}{\beta s_k} - \eta}{\frac{1-s_p+(\eta-1)s_k}{\beta s_k}\left(z+\Delta-\beta\Delta_k\right) - \eta\left(z+\Delta-\Delta_k\right)} + \frac{\beta}{1-\beta}\frac{1}{z+\Delta}
\end{aligned} \tag{64}$$

où

$$\varphi = h + \Delta_k - \Delta + x\left(h + \left(1-\beta\right)\Delta_k\right)\frac{1-s_p+\left(\eta-1\right)s_k}{\beta s_k} \tag{65}$$

$$\Delta = \Delta_b + \sigma_a\left(\Delta_a - \Delta_b\right) + \sigma_m\left(\Delta_m - \Delta_b\right) + \sigma_n\left(\Delta_n - \Delta_b\right) \tag{66}$$

En remplaçant (60) dans (61) et (62), on trouve

$$\sigma_m = \frac{\beta_m \frac{c_w}{c_u}\left(\left(s_a+s_m\right)\varphi - z\right) + s_m\varphi}{\Delta_a - \Delta_m + \varphi\frac{s_a}{\sigma_a}} \tag{67}$$

$$\sigma_n = \frac{\beta_n \frac{c_w}{c_u}\left(\left(s_a+s_m\right)\varphi - z\right)}{\Delta_a - \Delta_n + \varphi\frac{s_a}{\sigma_a}} \tag{68}$$

En substitutant (67) et (68) dans (60) et résolvant pour z, on obtient

$$z\left(\varphi,\sigma_a\right) \equiv \varphi\left(s_a+s_m\right) - \frac{c_u\left(\Delta_a-\Delta_b+\varphi\frac{s_a}{\sigma_a}\right)\left(1-\sigma_a-\frac{\varphi s_m}{\Delta_a-\Delta_m+\varphi\frac{s_a}{\sigma_a}}\right)}{c_v + c_w\left(\Delta_a-\Delta_b+\varphi\frac{s_a}{\sigma_a}\right)\left(\frac{\beta_m}{\Delta_a-\Delta_m+\varphi\frac{s_a}{\sigma_a}}+\frac{\beta_n}{\Delta_a-\Delta_n+\varphi\frac{s_a}{\sigma_a}}\right)} \tag{69}$$

En remplaçant (69) dans (67) et (68), on a

$$\begin{aligned}
\sigma_n\left(\varphi,\sigma_a\right) &= \frac{\beta_n}{\Delta_a-\Delta_n+\varphi\frac{s_a}{\sigma_a}} \\
&\quad \times\frac{c_w\left(\Delta_a-\Delta_b+\varphi\frac{s_a}{\sigma_a}\right)\left(1-\sigma_a-\frac{\varphi s_m}{\Delta_a-\Delta_m+\varphi\frac{s_a}{\sigma_a}}\right)}{c_v + c_w\left(\Delta_a-\Delta_b+\varphi\frac{s_a}{\sigma_a}\right)\left(\frac{\beta_m}{\Delta_a-\Delta_m+\varphi\frac{s_a}{\sigma_a}}+\frac{\beta_n}{\Delta_a-\Delta_n+\varphi\frac{s_a}{\sigma_a}}\right)} && (70)\\
\sigma_m\left(\varphi,\sigma_a\right) &\equiv \frac{\varphi s_m}{\Delta_a-\Delta_m+\varphi\frac{s_a}{\sigma_a}} + \sigma_n\left(\varphi,\sigma_a\right)\frac{\beta_m}{\beta_n}\frac{\Delta_a-\Delta_n+\varphi\frac{s_a}{\sigma_a}}{\Delta_a-\Delta_m+\varphi\frac{s_a}{\sigma_a}} && (71)
\end{aligned}$$

De (65), on calcule

$$x = \frac{\varphi - z}{z+\Delta-\beta\Delta_k}\frac{\beta s_k}{1-s_p+\left(\eta-1\right)s_k} \tag{72}$$

En substituant en (64) et résolvant pour η, on trouve

$$\eta\left(\varphi,\sigma_a\right) \equiv \frac{1}{1-\beta}\frac{1-s_p-s_k}{s_k}\frac{1-\frac{\varphi+\Delta(\varphi,\sigma_a)-\beta\Delta_k}{\varphi(s_a+s_m)-z(\varphi,\sigma_a)}+\frac{1}{c_u}\frac{\beta}{1-\beta}\frac{z(\varphi,\sigma_a)+\Delta(\varphi,\sigma_a)-\beta\Delta_k}{z(\varphi,\sigma_a)+\Delta(\varphi,\sigma_a)}}{\frac{\varphi+\Delta(\varphi,\sigma_a)-\beta\Delta_k}{\varphi(s_a+s_m)-z(\varphi,\sigma_a)}\frac{z(\varphi,\sigma_a)+\Delta(\varphi,\sigma_a)}{z(\varphi,\sigma_a)+\Delta(\varphi,\sigma_a)-\beta\Delta_k}-\frac{1}{c_u}\frac{\beta}{1-\beta}-1} \tag{73}$$

où

$$\Delta\left(\varphi,\sigma_a\right) \equiv \Delta_b + \sigma_a\left(\Delta_a-\Delta_b\right) + \sigma_m\left(\varphi,\sigma_a\right)\left(\Delta_m-\Delta_b\right) + \sigma_n\left(\varphi,\sigma_a\right)\left(\Delta_n-\Delta_b\right)$$

En remplaçant (72) dans (59), on a

$$\begin{aligned}
\varphi &= \theta\sigma_a^{s_a}\sigma_m\left(\varphi,\sigma_a\right)^{s_m}\left(\eta\left(\varphi,\sigma_a\right)-1\right)^{1-s_k-s_a-s_m} \\
&\quad * \left[\frac{\varphi - z\left(\varphi,\sigma_a\right)}{z\left(\varphi,\sigma_a\right)+\Delta\left(\varphi,\sigma_a\right)-\beta\Delta_k}\frac{\beta s_k}{1-s_p+\left(\eta\left(\varphi,\sigma_a\right)-1\right)s_k}\right]^{1-s_a-s_m} && (74)
\end{aligned}$$

Finalement, en substitutant (72) dans (63), on obtient

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\varphi\frac{1-s_k-s_a-s_m}{\eta(\varphi,\sigma_a)-1} - \left(\varphi - z\left(\varphi,\sigma_a\right)\right)\frac{s_k}{1-s_p+(\eta(\varphi,\sigma_a)-1)s_k}}{\varphi\left(s_a+s_m\right)-z\left(\varphi,\sigma_a\right)} && (75)\\
&\quad + \frac{\left(1-\beta\right)\left(z\left(\varphi,\sigma_a\right)+\Delta\left(\varphi,\sigma_a\right)\right)}{\frac{1-s_p-s_k}{s_k}\left(z\left(\varphi,\sigma_a\right)+\Delta\left(\varphi,\sigma_a\right)-\beta\Delta_k\right)+\eta\left(\varphi,\sigma_a\right)\left(1-\beta\right)\left(z\left(\varphi,\sigma_a\right)+\Delta\left(\varphi,\sigma_a\right)\right)}
\end{aligned}$$

La politique optimale $\left(\varphi,\sigma_a\right)^*$ est solution du système de dimension deux (74-75), où $\left(z,\sigma_m,\sigma_n,\eta\right)^*$ sont donnés par (69), (70), (71) et (73), respectivement. ■

9.4 Tableau. – Etalonnage du modèle

Paramètre	Definition	Valeur
i	Taux de préférence pour le présent	4.00
c_u	Coefficient de la fonction d'utilité (consommation privée)	49.00
c_v	Coefficient de la fonction d'utilité (consommation publique)	49.00
$c_w = 1 - c_u - c_v$	Coefficient de la fonction d'utilité (service de défense)	2.00
s_k	Coefficient de la fonction de production (capital productif privé)	75.00
s_a	Coefficient de la fonction de production (capital productif public)	23.00
s_m	Coefficient de la fonction de production (R&D militaire)	1.00
s_p	Coefficient de la fonction de production (R&D privée)	1.00
θ	Coefficient de la fonction de production (paramètre d'échelle)	50.00
β_m	Coefficient de la fonction de production du service de défense (R&D militaire)	10.00
$\beta_n = 1 - \beta_m$	Coefficient de la fonction de production du service de défense (autres dépenses militaires)	90.00
δ_k	Taux de dépréciation du capital productif privé	5.00
δ_a	Taux de dépréciation du capital productif public	7.00
δ_b	Taux de dépréciation de la consommation publique	100.00
δ_m	Taux de dépréciation du stock de connaissances issues de la R&D militaire	12.00
δ_n	Taux de dépréciation du stock accumulé des autres dépenses militaires	20.00

Etalonnage du modèle : scénario de base (valeur des paramètres exprimée en %)

9.5 Tableau. – Paramètres utilisés pour les simulations numériques

Paramètre	Definition	Calibrés (%)
i	Taux de préférence pour le présent	4.00
c_u	Coefficient de la fonction d'utilité (consommation privée)	49.00
c_v	Coefficient de la fonction d'utilité (consommation publique)	49.00
$c_w = 1 - c_u - c_v$	Coefficient de la fonction d'utilité (service de défense)	2.00
s_k	Coefficient de la fonction de production (capital productif privé)	75.00
s_a	Coefficient de la fonction de production (capital productif public)	23.00
s_m	Coefficient de la fonction de production (R&D militaire)	1.00
s_p	Coefficient de la fonction de production (R&D privée)	1.00
β_m	Coefficient de la fonction de production du service de défense (R&D militaire)	10.00
$\beta_n = 1 - \beta_m$	Coefficient de la fonction de production du service de défense (autres dépenses)	90.00
δ_k	Taux de dépréciation du capital productif privé	5.00
δ_a	Taux de dépréciation du capital productif public	7.00
δ_b	Taux de dépréciation de la consommation publique	100.00
δ_m	Taux de dépréciation du stock de connaissances issues de la R&D militaire	12.00
δ_n	Taux de dépréciation du stock accumulé des autres dépenses militaires	20.00
		Observés (%)
$\tilde{\sigma}_a$	Part de l'investissement public dans l'ensemble des recettes fiscales	21.12
$\tilde{\sigma}_b$	Part de la consommation publique dans l'ensemble des recettes fiscales	73.13
$\tilde{\sigma}_m$	Part de la R&D militaire dans l'ensemble des recettes fiscales	0.40
$\tilde{\sigma}_n$	Part des autres dépenses militaires dans l'ensemble des recettes fiscales	5.35
τ	Taux de pression fiscale	43.59
τ_q	Taux d'imposition des revenus du travail et du capital	$43,65$
τ_p	Taux d'imposition des revenus de la R&D privée	$37,65$
$\gamma - 1$	Taux de croissance du PIB	2.00
	PIB (2005; milliards €)	1691

Calibrage du modèle (valeur des paramètres exprimée en %)

9.6 Simulation des scénarios complémentaires

On simule ici les deux scénarios complémentaires :

- Scénario n°4: chiffrage de l'impact sur le taux de croissance et le PIB, d'un doublement des dépenses de R&D militaire, intégralement financé par une augmentation du taux d'imposition sur les revenus du travail et du capital

- Scénario n°5: chiffrage de l'impact sur le taux de croissance et le PIB, d'une baisse du taux d'imposition de la R&D privée correspondant à un doublement du Crédit Impôt Recherche, intégralement financée par une hausse du taux d'imposition sur les revenus du travail et du capital.

Scénario 4 Dans ce scénario la mesure de politique économique que nous chiffrons consiste en *un doublement des dépenses de R&D militaire, intégralement financé par une augmentation du taux d'imposition sur les revenus du travail et du capital.*

On calcule donc d'abord la modification à apporter au taux d'imposition sur les revenus du travail et du capital (τ_q) pour que *ex ante* le solde budgétaire demeure équilibré. Sachant que les recettes fiscales sont données par la formule:

$$RF = \tau Y = [\tau_p s_p + \tau_q(1 - s_p)]\, Y$$

la variation de recettes fiscales imputable au passage d'un taux de prélèvement τ_q à un taux τ'_q est de la forme :

$$\Delta RF = (\tau'_q - \tau_q)(1 - s_p)Y$$

Comme par ailleurs, la variation de recettes fiscales nécessaire au financement d'un doublement des dépenses de R&D est de la forme :

$$\Delta RF = \tilde{\sigma}_m RF$$

on en déduit aisément l'augmentation du taux d'imposition sur les revenus du travail et du capital pour que *ex ante* le doublement des dépenses de R&D laisse le solde budgétaire inchangé :

$$\begin{aligned} & & (\tau'_q - \tau_q)(1 - s_p)Y = \tilde{\sigma}_m RF \\ i.e. \quad \tau'_q &=& \tau_q + \frac{\tilde{\sigma}_m RF}{(1 - s_p)Y} = \tau_q + \frac{\tilde{\sigma}_m \tau}{(1 - s_p)} \\ &=& 0.4365 + \frac{0.004}{0.99}.0.4359 = 43.826\% \end{aligned}$$

Le doublement des dépenses de R&D militaire est ainsi intégralement financé par une hausse de 43.65% à 43.826% du taux d'imposition des revenus du travail et du capital.

L'évolution des parts budgétaires de la consommation publique, de l'investissement public, de la R&D militaire et des autres dépenses militaires dans les dépenses de l'Etat sont alors calculées de la façon suivante:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}'_b &= \frac{\tilde{\sigma}_b RF}{RF + \Delta RF} = \frac{\tilde{\sigma}_b}{1 + \tilde{\sigma}_m} = \frac{0.7313}{(1 + 0.004)} = 72.84\% \\ \tilde{\sigma}'_a &= \frac{\tilde{\sigma}_a RF}{RF + \Delta RF} = \frac{\tilde{\sigma}_a}{1 + \tilde{\sigma}_m} = \frac{0.2112}{(1 + 0.004)} = 21.03\% \\ \tilde{\sigma}'_m &= \frac{2\tilde{\sigma}_m RF}{RF + \Delta RF} = \frac{2\tilde{\sigma}_m}{1 + \tilde{\sigma}_m} = \frac{2 \times 0.004}{(1 + 0.004)} = 0.8\% \\ \tilde{\sigma}'_n &= \frac{\tilde{\sigma}_n RF}{RF + \Delta RF} = \frac{\tilde{\sigma}_n}{1 + \tilde{\sigma}_m} = \frac{0.0535}{(1 + 0.004)} = 5.33\% \end{aligned}$$

Les résultats de la simulation numérique correspondant à cette variante de politique économique sont donnés par le tableau ci-dessous :

	Taux de croissance de l'économie en %	Variations actualisées cumulées du PIB (milliards € 2005)	Variations actualisées cumulées du PIB (en % du PIB 2005)	Variations des recettes fiscales (milliards €)
Avant le choc	2.000	0.000	0.000	0.000
1 an après	2.324	5.150	0.305	5.404
5 ans après	2.155	43.657	2.582	9.472
10 ans après	2.085	93.482	5.528	11.159
Asymptotiquement	2.058	611.711	36.174	-

Le taux de croissance de l'économie augmente très fortement la première année (+0.32%) pour se stabiliser à 2.08% (à comparer aux 2% sans choc) au bout d'une décennie et à 2.06% à long terme. Grace à cette mesure de politique économique ce sont ainsi 5.15 milliards € de PIB (actualisés) qui sont gagnés dès la première année et plus de 93 milliards sur une décennie, engendrant un gain quasi-immédiat de 5.4 milliards € de recettes fiscales la première année et de 11.16 milliards € la dixième année.

Scénario 5 Dans ce scénario la mesure de politique économique que nous chiffrons consiste en une *baisse du taux d'imposition des revenus de la R&D privée, correspondant à un doublement du Crédit Impôt Recherche, intégralement financée par une hausse du taux d'imposition sur les revenus du travail et du capital.* Il s'agit donc de la même mesure que celle analysée dans le scénario 3 figurant dans l'article, le doublement du Crédit Impôt Recherche, mais avec un mode de financement différent : à la place d'une baisse compensatoire de la consommation publique, on impose ici une hausse des impôts.

Comme pour le scénario n°4 nous devons donc préalablement calculer la modification à apporter au taux d'imposition sur les revenus du travail et du capital (τ_q) pour que *ex ante* le solde budgétaire demeure équilibré.

La réduction de recettes fiscales résultant d'un doublement du Crédit Impôt Recherche (CIR) est :

$$\Delta RF = CIR = -1 \text{ milliard}$$

Comme pour le scénario n°3 de l'article, le montant total des taxes pesant sur les revenus de la R&D n'est donc plus après le choc de 6.37 milliards €, mais de 5.37 milliards € seulement. En rapportant ce chiffre au montant des revenus correspondant (16.91 milliards €) on obtient le nouveau taux d'imposition spécifique sur les revenus de la R&D, soit $\tau_p = 31.76\%$ (au lieu de 37.65% avant le choc).

Comme pour le scénario n°4, l'augmentation de τ_q à τ'_q du taux de prélèvement sur les revenus du travail et du capital, permettant de laisser inchangé le solde budgétaire malgré l'augmentation de 1 milliard du Crédit Impôt Recherche, est donnée par :

$$\begin{aligned} & & (\tau'_q - \tau_q)(1 - s_p)Y = 1 \text{ milliard } € \\ \textit{i.e.} \qquad \tau'_q &=& \tau_q + \frac{1}{(1 - s_p)Y} \\ &=& 0.4365 + \frac{1}{0.99 \times 1691} = 43.7097\% \end{aligned}$$

La défiscalisation des revenus de la R&D privée, à travers le doublement du Crédit Impôt Recherche, est ainsi intégralement financée par une hausse de 43.65% à 43.7097% du taux d'imposition des revenus du travail et du capital. Les résultats de la simulation numérique correspondant à cette variante de politique économique sont donnés par le tableau ci-dessous :

	Taux de croissance de l'économie en %	Variations actualisées cumulées du PIB (milliards € 2005)	Variations actualisées cumulées du PIB (en % du PIB 2005)	Variations des recettes fiscales (milliards €)
Avant le choc	2.000	0.000	0.000	0.000
1 an après	2.022	0.346	0.020	0.164
5 ans après	2.009	2.696	0.159	0.355
10 ans après	2.003	5.066	0.300	0.311
Asymptotiquement	2.001	14.770	0.873	-

Le point intéressant concernant cette mesure de politique économique est son impact quasi-nul à long terme sur le taux de croissance de l'économie, qui se traduit par un gain limité de 5.07 milliards € sur une décennie. Tout se passe ainsi comme si l'impact négatif de l'augmentation de la taxation supplémentaire des revenus du travail et du capital compensait *in fine,* en grande partie, l'impact positif de la défiscalisation des revenus de la R&D privée. De ce point de vue notre modéle est sans ambiguïté : mieux vaut directement accroître l'investissement public en R&D défense, quelque soit le mode de financement de cet investissement supplémentaire, que tenter de relancer la R&D privée par des mesures de défiscalisation supplémentaires, du moins tant que celles-ci sont financées par une hausse des autres taux d'imposition.